РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Сибирское отделение
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С.Л. Соболева
Омский филиал

abstracts

Международная школа-семинар

Новые алгебро-логические методы решения систем уравнений в алгебраических системах

16 — 22 августа 2009
Омск, Россия

тезисы докладов

International Workshop

New Algebraic-Logical Methods in Solutions for Systems of Equations in Algebraic Structures

August 16 — 22, 2009
Omsk, Russia

Омск 2009

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Сибирское отделение
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С.Л. Соболева
Омский филиал

Международная школа-семинар

НОВЫЕ АЛГЕБРО-ЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ В АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Тезисы докладов

International Algebraic Workshop

NEW ALGEBRAIC-LOGICAL METHODS IN SOLUTIONS FOR SYSTEMS OF EQUATIONS IN ALGEBRAIC STRUCTURES

Abstracts

Омск, 2009

УДК 510 + 512

Международная школа-семинар “Новые алгебро-логические методы решения систем уравнений в алгебраических система”. Тезисы докладов / Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН. - Омск: Изд-во Ом. гос. ун-та, 2009 — 66 с.

International algebraic workshop “New algebraic-logical methods in solutions for systems of equations in algebraic structures”. Abstracts / Omsk Department of Sobolev Institute of Mathematics SB RAS. 2009, — 66 p.

ISBN 978-5-7779-1066-0

Сборник содержит тезисы докладов, представленных на международную школу-семинар “Новые алгебро-логические методы решения систем уравнений в алгебраических системах”.

Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 09-01-06044-г) и Омского государственного университета им. Ф.М. Достоевского.

В оформлении обложки использована фотография Тарских ворот, Омск. Почтовая открытка. Начало XX в.

Cover design image source: postcard photograph of Tarskie Gate at the beginning of the 20th century, Omsk, Russia.

Оригинал-макет подготовили: Э.Ю. Даниярова, А.А. Мищенко, А.В. Трейер

Ответственный за выпуск: Э.Ю. Даниярова

Адрес оргомитета: 644099, Омск-99, ул. Певцова 13, Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН.

E-mail: `OmskConf2009@ofim.oscsbras.ru`

тел: (3812) 24-70-41

`http://omskconf2009.oscsbras.ru`

Программный комитет

Председатель:
В.Н. Ремесленников (Россия)
Сопредседатель:
А.Г. Мясников (Канада)

Л.А. Бокуть (Россия)
Э. Вентура (Испания)
А.М. Вершик (Россия)
Р. Гильман (США)
Р.И. Григорчук (США)
Э. Данкин (Великобритания)
В. Дикерт (Германия)
Ю.Л. Ершов (Россия)
Е. Зельманов (США)
А.Ю. Ольшанский (США)
Е.А. Палютин (Россия)
Б.И. Плоткин (Израиль)
Н.С. Романовский (Россия)
В.А. Романьков (Россия)
О.Г. Харлампович (Канада)
Ю. Чен (Китай)

Scientific Committee

Chairman:
V.N. Remeslennikov (Russia)
Co-chairman:
A.G. Miasnikov (Canada)

L.A. Bokut' (Russia)
Yu. Chen (China)
V. Dickert (Germany)
A. Duncan (UK)
Yu.L. Ershov (Russia)
R. Gilman (USA)
R.I. Grigirchuk (USA)
O.G. Kharlampovich (Canada)
A.Yu. Olshanskii (USA)
E.A. Palyutin (Russia)
B.I. Plotkin (Israel)
V.A. Roman'kov (Russia)
N.S. Romanovskii (Russia)
E. Ventura (Spain)
A.M. Vershik (Russia)
E. Zelmanov (USA)

Организационный комитет

И.В. Ашаев, Э.Ю. Даниярова, Ю.С. Дворжецкий, Л.А. Дубровская, Е.С. Есып, А.Н. Зубков, И.В. Казачков, М.В. Котов, Е.Г. Кукина, Л.М. Мартынов, А.А. Мищенко, В.Б. Николаев, Е.М. Новикова, Г.А. Носков, И.В. Онскуль, В.Н. Ремесленников, В.А. Романьков, А.Н. Рыбалов, В.А. Топчий, А.В. Трейер, Е.В. Френкель, А.Н. Шевляков

Organizing Committee

I.V. Ashaev, E.Yu. Daniyarova, L.A. Dubrovskaya, Yu.S. Dvorjetsky, E.S. Esyp, E.V. Frenkel', I.V. Kazachkov, M.V. Kotov, E.G. Kukina, L.M. Martynov, A.A. Mishchenko, V.B. Nikolaev, G.A. Noskov, E.M. Novikova, I.V. Onskul', V.N. Remeslennikov, V.A. Roman'kov, A.N. Rybalov, A.N. Shevlyakov, V.A. Topchii, A.V. Treyer, A.N. Zubkov

Covering $\mathbb{R}$-trees, $\mathbb{R}$-free groups, dendrites, and all that

Valery N. Berestovskii, Condrad P. Plaut

We prove that every length space X is the orbit space (with the quotient metric) of an $\mathbb{R}$-tree $\overline{X}$ via a free action of a subgroup $\Gamma(X)$ of isometries of $\overline{X}$. $\overline{X}$ is defined as the space of based "non-backtracking" rectifiable paths in X, where the distance between two paths is the sum of their lengths from the first bifurcation point to their endpoints. $\Gamma(X) \subset \overline{X}$ is the subset of loops with a natural group structure of "canceled concatenation" and the quotient mapping $\overline{\phi} : \overline{X} \to X$ is the end-point map. The mapping $\overline{\phi} : \overline{X} \to X$ is a kind of generalized universal covering map called a URL-map, and $\overline{X}$ is the unique (up to isometry) $\mathbb{R}$-tree that admits a URL-map onto X. Here a function f between length spaces is called *unique rectifiable lifting (URL)* if it has the following two properties: (I) f preserves the length of rectifiable paths in the sense that the length of c is equal to the length of $f \circ c$ for every rectifiable path c in X; (II) If c is any rectifiable path in Y starting at a point p and $f(q) = p$ then there is a unique path c_L starting at q such that $f \circ c_L = c$, and c_L is rectifiable.

When X is a local $\mathbb{R}$-tree, $\overline{\phi} : \overline{X} \to X$ is the traditional universal covering map and the group $\Gamma(X) = \pi_1(X)$, the fundamental group of X. When X is a complete Riemannian manifold M^n of dimension $n \geq 2$, or a fractal curve such as the Menger sponge $\mathbb{M}$, the Sierpin'ski carpet S_c or gasket S_g, $\overline{X}$ is isometric to the so-called "universal" $\mathbb{R}$-tree $A_{\mathfrak{c}}$, which has valency the continuum $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$ at each point.

Recall that for a point t in a $\mathbb{R}$-tree T, the valency at t is the cardinality of the set of connected components of $T \backslash \{t\}$, and T is said to have valency at most μ if the valency of every point in T is at most μ. A nontrivial complete metrically homogeneous $\mathbb{R}$-tree can be characterized as a complete $\mathbb{R}$-tree A_μ with valency μ at each point for a cardinal number $\mu \geq 2$. It is unique up to isometry, and μ-universal in the sense that every $\mathbb{R}$-tree of valency at most μ isometrically embeds in A_μ. The existence of A_μ and the results just mentioned were proved in [1]; $A_{\mathfrak{c}}$ can be isometrically embedded at infinity in the Lobachevski space $L^n, n \geq 2$.

For a general separable length space X, $\overline{X}$ is a subtree of $A_{\mathfrak{c}}$. When X is M^n, $\mathbb{M}$, S_c, or the Hawaiian earring H with a compatible length metric, $\Gamma(X)$ is infinitely generated, locally free, not free, and cannot be presented as a free product of fundamental groups of closed surfaces and abelian groups. Moreover, $\overline{X}$ is the minimal invariant $\mathbb{R}$-tree relative to the action of $\Gamma(X)$. Hence in these cases the action of $\Gamma(X)$ on $\overline{X}$ adds to previous examples of Dunwoody and Zastrow [2] that give a negative

answer to a question of J.W. Morgan. Indeed, for a particular choice of length metric on H, we obtain precisely Zastrow's example.

The complete text is given in the preprint [3].

References

[1] J. Mayer, J. Nikiel, L. Oversteegen, *Universal spaces for $\mathbb{R}$-trees*, TAMS, **334**, 1992, 411–432.

[2] A. Zastrow, *Construction of an infinitely generated group that is not a free product of surface groups and abelian groups, but which acts freely on an $\mathbb{R}$-tree*, Proc. Royal Soc. Edinburg (A), **128**, 1998, 433–445.

[3] V.N. Berestovskii, C.P. Plaut, *Covering $\mathbb{R}$-trees, $\mathbb{R}$-free groups, and dendrites*, preprint arXiv:0904.3767 [math.MG] 23 Apr 2009, 16 p.

Valery N. Berestovskii,
Omsk Branch Institute of Mathematics SB RAS, Omsk, Russia,
e-mail: `vberesto@nd.edu`

On the conjugacy separability for subgroups in the class of virtually free groups

Oleg V. Bogopolski, F. Grunewald

A group G is called *conjugacy separable* if for every two elements g_1, g_2 of G, either g_1 is conjugate to g_2, or there exists a finite quotient $\overline{G}$ of G, such that the image of g_1 is not conjugate to the image of g_2 in $\overline{G}$.

We say that a group G has the *conjugacy separability property for finitely generated subgroups*, if the analogous property holds for every two finitely generated subgroups H_1, H_2 of G.

This research was motivated, on the one hand by the works of P.F. Stebe [5] and J.L. Dyer [2], who proved that finitely generated virtually free groups are conjugacy separable, and on the other hand by the work of F. Grunewald and D. Segal [4], who proved that virtually polycyclic groups have the conjugacy separability property for finitely generated subgroups.

Recall that by a theorem of Stallings, every finitely generated virtually free group can be represented as the fundamental group of a finite graph of finite groups. We prove the following theorem.

Theorem. *Let G be the fundamental group of a finite tree of finite groups. Then G has the conjugacy separability property for finitely generated subgroups.*

In the proof we use a technique from the paper [1] and a conjecture of Erdös about girths of bipartite graphs, which was proved in [3].

References

[1] O. Bogopolski, *Almost free groups and the M. Hall property*, Algebra and Logic, **33** (1), 1994, 1–13.

[2] J.L. Dyer, *Separating conjugates in free-by-finite groups*, J. London Math. Soc., **20** (2), 1979, 215–221.

[3] Z. Füredi, F. Lazebnik, Á. Seress, V.A. Ustimenko, A.J. Woldar, *Graphs of prescribed girth and bi-degree*, J. Combinatorial Theory, Ser. B, **64** (2), 1995, 228–239.

[4] F.J. Grunewald, D. Segal, *Conjugacy in polycyclic groups*, Comm. Algebra, **6**, 1978, 775–798.

[5] P.F. Stebe, *Conjugacy separability of groups of integer matrices*, Proc. AMS, **32**, 1972, 1–7.

Oleg V. Bogopolski,
Duesseldorf University / Institute of Mathematics SB RAS,
Duesseldorf / Novosibirsk, Germany / Russia,
e-mail: `Oleg_Bogopolski@yahoo.com`

Universal algebraic geometry

Evelina Yu. Daniyarova, Alexei G. Miasnikov,
Vladimir N. Remeslennikov

Quite often relations between sets of elements of a fixed algebraic structure $\mathcal{A}$ can be described in terms of equations over $\mathcal{A}$. In the classical case, when $\mathcal{A}$ is a field, the area of mathematics where such relations are studied is known under the name of *algebraic geometry*. It is natural to use the same name in the general case.

Algebraic geometry over arbitrary algebraic structures is a new area of research in modern algebra, nevertheless, there are already several breakthrough particular results here, as well as, interesting developments of a general theory.

Cumulative to nowadays material of analysis of structures of algebraic sets over concrete algebraic structures (groups, rings, algebras, etc.) create a necessity of theoretical conception of this material. There are general results which hold in the algebraic geometries over arbitrary algebraic structures, we refer to them as the *universal algebraic geometry*. Research in this area started with a series of papers by B. I. Plotkin, G. Baumslag, A. G. Miasnikov, and V. N. Remeslennikov.

Now we work for a preparation of a series of papers on universal algebraic geometry, the main purpose of which is to lay down the basics of the algebraic geometry over arbitrary algebraic structure $\mathcal{A}$ and prove general results in universal algebraic geometry.

At lectures on universal algebraic geometry audience will get to know how to define such notions of universal algebraic geometry as an equation over $\mathcal{A}$, an algebraic set over $\mathcal{A}$, a radical, a coordinate algebra, the Zariski topology, an irreducible set and equationally Noetherian algebra.

Among general results in universal algebraic geometry note: 1) Theorem on dual equivalence of the category of algebraic sets over $\mathcal{A}$ and the category of coordinate algebras of algebraic sets over $\mathcal{A}$, and 2) the following unification theorem.

Theorem. *Let $\mathcal{A}$ be an equationally Noetherian algebra in a language $\mathcal{L}$ (with no predicates). Then for a finitely generated algebra $\mathcal{C}$ of $\mathcal{L}$ the following conditions are equivalent:*

1. $\mathrm{Th}_\forall(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{Th}_\forall(\mathcal{C})$, *i.e.*, $\mathcal{C} \in \mathbf{Ucl}(\mathcal{A})$*;*
2. $\mathrm{Th}_\exists(\mathcal{A}) \supseteq \mathrm{Th}_\exists(\mathcal{C})$*;*
3. $\mathcal{C}$ *embeds into an ultrapower of* $\mathcal{A}$*;*

4. *$\mathcal{C}$ is discriminated by $\mathcal{A}$;*

5. *$\mathcal{C}$ is a limit algebra over $\mathcal{A}$;*

6. *$\mathcal{C}$ is an algebra defined by a complete atomic type in the theory $\mathrm{Th}_{\forall}(\mathcal{A})$ in $\mathcal{L}$;*

7. *$\mathcal{C}$ is the coordinate algebra of a non-empty irreducible algebraic set over $\mathcal{A}$ defined by a system of equations in the language $\mathcal{L}$.*

Evelina Yu. Daniyarova,
Omsk Branch Institute of Mathematics SB RAS, Omsk, Russia,
e-mail: evelina.omsk@list.ru

Alexei G. Miasnikov,
McGill University, Montreal, Canada,
e-mail: alexeim@math.mcgill.ca

Vladimir N. Remeslennikov,
Omsk Branch Institute of Mathematics SB RAS, Omsk, Russia,
e-mail: remesl@ofim.oscsbras.ru

Measuring in free groups and amalgamated products of groups

Elizaveta V. Frenkel, Alexei G. Miasnikov,
Vladimir N. Remeslennikov

In this work we study asymptotic behavior of regular subsets in a free group F of finite rank, compare their sizes at infinity, and develop techniques to compute the probabilities of sets relative to distributions on F that come naturally from no-return random walks on the Cayley graph of F. We apply these techniques to study cosets, double cosets, and Schreier representatives of finitely generated subgroups of F and also to analyze relative sizes of regular prefixed-closed subsets in F. We also work with a free product of finitely generated free groups with amalgamation (over finitely generated group) and introduce several new types of (bidimensional) asymptotic densities on this algebraic object. Moreover, we construct procedures of random normal forms generation, define probabilities of such a generated normal form and give estimates of sizes at infinity of singular and unstable normal forms relative to enclosing sets of normal forms.

Elizaveta V. Frenkel,
Moscow, Russia,
e-mail: `lizzy.frenkel@gmail.com`

Alexei G. Miasnikov,
McGill University, Montreal, Canada,
e-mail: `alexeim@math.mcgill.ca`

Vladimir N. Remeslennikov,
Omsk Branch Institute of Mathematics SB RAS, Omsk, Russia,
e-mail: `remesl@ofim.oscsbras.ru`

Upper estimates of the mean extinction time of a population with a constant carrying capacity

Sergey A. Klokov

Let $K > 0$ be the carrying capacity of a biological system with non-overlapping generations and individuals of an identical type. For a given individual, the distribution of offspring depends on the current population size in the following way. If there are k individuals in the current generation, each individual produces a Poisson number of offspring with parameter $\frac{2}{1+(k/K)}$ independently of others. If the population size is less (greater) than K, then more (less) than one offspring is produced on average, and the dynamics of the population is described by a supercritical (subcritical) process when the population size is less (greater) than K. In the beginning the population size approaches to K rather quickly and then the population dies out after prolonged oscillations about the level K.

Let X_n be the population size in the n-th generation. The sequence (X_n) is a homogeneous Markov chain with state space $\mathbb{Z}_+$. The state 0 is absorbing and $\inf_{k>0} p_{k,0} = e^{-2K} > 0$, hence every population dies out with probability 1. Let τ_k be a random time until extinction of the population having initial size k. The probability of an immediate extinction is at least e^{-2K} and comparing to the geometrical distribution with parameter $p = e^{-2K}$ gives a rough upper estimate for the mean extinction time,

$$\mathbb{E}\tau_k \le \frac{1}{\inf_{k>0} p_{k,0}} = e^{2K}. \tag{1}$$

We are interested in more realistic upper estimates for $\mathbb{E}\tau_k$ and show that a theoretical upper bound of the type $\sup_k \mathbb{E}\tau_k \le Ce^{cK}$ holds with the constant $c = 0.707$.

Theorem. *Let $K \ge 9$ be the carrying capacity. If the current population's size equals k, then each individual produces a Poisson number of offspring with parameter $\frac{2}{1+(k/K)}$ and dies. Let $[x]$ stand for the integer part of x, $\alpha = \frac{[0.4974\cdot K]}{K}$, $\beta = \frac{[0.2899\cdot\alpha K]}{\alpha K}$,*

$$g(\alpha,\beta) = 1 - \alpha + \alpha\ln\alpha + \frac{2\alpha}{1+\alpha} - \alpha\beta - \alpha\beta\ln\frac{2}{(1+\alpha)\beta} + \frac{2\alpha\beta}{1+\alpha\beta}, \tag{2}$$

and find an integer m to satisfy the inequality

$$\log_2(1+\sqrt{K}) + 3 \le m < \log_2(1+\sqrt{K}) + 4. \tag{3}$$

Then for the extinction time τ_k *of a population with initial size* k *the following estimate is true,*

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\tau_k \leq 103(1-\alpha)(2-(1+\alpha)\beta)\alpha\sqrt{\beta}K(m+1)2.5^{m-3}e^{g(\alpha,\beta)K}. \quad (4)$$

Acknowledgement. The work was jointly supported by the Russian Foundation for Basic Research (grants 06–01–00127, 09–01–00105), and the Russian President Fund (grant NSH–3695.2008.1).

Sergey A. Klokov,
Omsk Branch Institute of Mathematics SB RAS, Omsk, Russia,
e-mail: `s-klokov@yandex.ru`

A minimal generating system for invariants of several bilinear forms in dimension two case

Artem A. Lopatin

We work over an infinite field K of arbitrary characteristic. Let V be a vector space of dimension n, $(\cdot,\cdot)_{p_1},\ldots,(\cdot,\cdot)_{p_r}$ be bilinear forms on V, $(\cdot,\cdot)_{q_1},\ldots,(\cdot,\cdot)_{q_s}$ be bilinear forms on the dual space V^*, and $f_1,\ldots,f_d$ be linear maps $V\to V$. We fix a basis for V and the dual basis for V^*. The above mentioned datum is determined by a point in $X=M^d\oplus M^r\oplus M^s$, where M stands for all $n\times n$ matrices over K. The action of $GL(n)$ on V as a base change induces the action on X. The orbits of this action correspond to isomorphism classes of the mentioned bilinear forms and linear maps. We explicitly described a minimal (by inclusion) system of generators for the algebra of invariants $K[X]^{GL(n)}$ in case $n=2$.

Artem A. Lopatin,
Omsk Branch Institute of Mathematics SB RAS, Omsk, Russia,
e-mail: `artem_lopatin@yahoo.com`

Limit algebras

Vladimir N. Remeslennikov

Fix an algebraic structure (an algebra) $\mathcal{A}$ in a language $\mathcal{L}$ (with no predicates). In the paper [1] following theorem is proved.

Theorem. *Let $\mathcal{A}$ be an equationally Noetherian algebra in a language $\mathcal{L}$. Then for a finitely generated algebra $\mathcal{C}$ of $\mathcal{L}$ the following conditions are equivalent:*

1. *$\mathcal{C}$ is the coordinate algebra of a non-empty irreducible algebraic set over $\mathcal{A}$ defined by a system of equations in the language $\mathcal{L}$;*
2. $\mathrm{Th}_{\forall}(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{Th}_{\forall}(\mathcal{C})$, *i.e.,* $\mathcal{C} \in \mathbf{Ucl}(\mathcal{A})$*;*
3. $\mathrm{Th}_{\exists}(\mathcal{A}) \supseteq \mathrm{Th}_{\exists}(\mathcal{C})$*;*
4. *$\mathcal{C}$ embeds into an ultrapower of $\mathcal{A}$;*
5. *$\mathcal{C}$ is discriminated by $\mathcal{A}$;*
6. *$\mathcal{C}$ is a limit algebra over $\mathcal{A}$;*
7. *$\mathcal{C}$ is an algebra defined by a complete atomic type in the theory* $\mathrm{Th}_{\forall}(\mathcal{A})$ *in $\mathcal{L}$.*

Denote by $\mathbf{U} = \mathbf{Ucl}(\mathcal{A})$ the universal closure of $\mathcal{A}$ and by $\mathbf{U}_{\omega}$ — class of finitely generated algebras from $\mathbf{U}$.

It is shown in [1] that all coordinate algebras of irreducible algebraic sets over $\mathcal{A}$, defined by systems of equations in the language $\mathcal{L}$, enter into $\mathbf{U}_{\omega}$. Moreover, if algebra $\mathcal{A}$ is equationally Noethrian, then by Theorem above inverse inclusion also holds. So the problem of classification of irreducible algebraic sets over $\mathcal{A}$ is equivalent to the problem of classification of algebras from the class $\mathbf{U}_{\omega}$.

There exist several notions of limit algebra. They arose from investigation of algebras from $\mathbf{U}_{\omega}$ by means of topological methods. We give tree basic definitions of limit algebra for algebra $\mathcal{A}$. For all of these definitions algebras from $\mathbf{U}_{\omega}$ and only they will be limit algebras.

References

[1] E. Daniyarova, A. Miasnikov, V. Remeslennikov, *Unification theorems in algebraic geometry*, Algebra and Discrete Mathematics, **1**, 2008.

Vladimir N. Remeslennikov
Omsk Branch Institute of Mathematics SB RAS, Omsk, Russia,
e-mail: remesl@ofim.oscsbras.ru

Densities of equations over groups

Robert H. Gilman, Alexei G. Myasnikov, Vitalii A. Roman'kov

The study of asymptotic properties in group theory has a long history. Usually the asymptotic densities involved are either zero or one. We provide new examples of algebraically significant sets of intermediate asymptotic density. We show that the set of all equations in k variables over a free nilpotent group which are satisfiable in that group has intermediate density. For a free abelian groups of rank m the density is $\zeta(k+m)/\zeta(k)$. For (absolutely) free groups we have a density result similar to the one for free nilpotent groups but with respect to equations of a particular form. By identifying these equations with elements of free groups, we obtain the first natural examples of sets of intermediate density for free groups of rank greater than two.

Vitalii A. Roman'kov,
Omsk State University, Omsk, Russia,
e-mail: `romankov48@mail.ru`

Alexei G. Myasnikov,
McGill University, Montreal, Canada,
e-mail: `alexeim@math.mcgill.ca`

Polynomial complexity classes over real algebras with nilpotent elements

Alexander N. Rybalov

We consider a computational complexity theory over arbitrary algebraic structures from [2] based on an approach to generalized computability developed by Ashaev, Belyaev and Myasnikov in [1]. Let $\mathcal{A}$ be an algebra over $\mathbb{R}$ with a nilpotent element α. We prove that analogs of the classical computational complexity classes P and NP over $\mathcal{A}$ are different.

References

[1] I.V. Ashaev, V.Ya. Belyaev, A.G. Myasnikov, *Approaches to the theory of generalized computablity*, Algebra i logika, **32** (4), 1993, 349–386.

[2] A.N. Rybalov, *Computational complexity over algebraic structures*, Siberian Mathematical Journal, **45** (6), 2004, 1365–1377.

Alexander N. Rybalov,
Omsk Branch of the Institute of Mathematics of SB RAS, Omsk, Russia,
e-mail: `alexander.rybalov@gmail.com`

On regularity and differential invariants of geometric structures and Lie pseudogroups

Rafael A. Sarkisyan

By a *bundle of geometric structures* on an oriented manifold X, we call a bundle associated with the principal bundle of oriented frames (or, coframes, which is the same) of order q of this manifold. A bundle of geometric structures E is called *nonspecial bundle* if the dimension m of its fiber is higher than the dimension n of it's base X; otherwise, E is called *special bundle*. The number of functionally independent local differential invariants of a nonspecial bundle E at a sufficiently general point of E increases to infinity as the differential degree of these invariants grows. The action of a group or a pseudogroup on some manifold is said to be *regular* at a point z of this manifold if the dimension of orbits of this action is constant in some neighborhood of z. For the case $n > 2$ each special manifold at each regular point is locally isomorphic (this isomorphism commutes with the action of the group $Diff(X)$) to one of the 19 types of *sample manifolds* E_i. (One may deal with the cases $n = 1$ and $n = 2$ in the similar way by changing some formulations of the results.) For all *sample manifolds*, the action of the group $Diff(X)$ on E_i is described. The canonical forms of sufficiently general local sections of special bundles are listed. For any special bundle E the finite *complete* set T of functionally independent differential invariants is written out explicitly. Completeness of set T means that each differential invariant (of arbitrary differential degree) at any sufficiently general point of E may be represented as a superposition of invariants, belonging to set T. Further discussion is valid for an arbitrary Lie pseudogroup PG of order q acting on arbitrary manifold P of dimension $m + n$ and not only for bundles of geometric structures. Let us consider the spaces J^kP and $J^\infty P$ consisting respectively of jets of order k and infinite jets of submanifolds of dimension n in the manifold P. For $k \geq s$, there is the natural projection $\pi(k, s) : J^kP \to J^sP$. The space $J^\infty P$ has an ordinary weak topology of projective limit. The action of the pseudogroup PG may be naturally extended to all manifolds J^kP and to the space $J^\infty P$. Then, we have:

(1) P has an open everywhere dense invariant set R^0 consisting of regular points.

(2) For each natural number k, there is an open everywhere dense invariant set R^k in J^k consisting of regular points.

(3) There is some natural number $K = K(n,m,q)$, depending only of n, m and q such that for each $k \geq K$ we have $\pi^{-1}(k,K)[R^K] \subseteq R^k$, i.e. each preimage of each point from R^K is regular. Let us define $R^\infty = \pi^{-1}(\infty, s)[R^K]$.

(4) If the number of functionally independent differential invariants at point $z \in R^\infty$ is not finite, there is a finite set (depending of z) of differential invariants $F_1, \ldots, F_s$ and n invariant differentiations $D_1, \ldots, D_n$, such that acting repeatedly by D_i on F_j one gets complete set of differential invariants for each point close to point z (Tresse's Theorem). In a sense, for each point $z \in R^\infty$ functions $F_1, \ldots, F_s$ and invariant differentiations $D_1, \ldots, D_n$ may be explicitly found (using differentiations, algebraic operations and solution of systems of algebraic equations via implicit function theorem). The number $P_z(k)$ of functionally independent differential invariants at point z having differential degree k is a polynomial in k (for sufficiently large k). We call this polynomial the *Hilbert's polynomial* of the point z.

(5) The domain R^∞ is a disjoint union of finite number of open sets (atoms), every point of each atom having the same Hilbert polynomial. In principle one can explicitly derive conditions defining each atom from Lie pseudogroup PG equations. In principle for each atom the corresponding Hilbert polynomial can be computed explicitly. Hilbert polynomials for all atoms are contained in the *universal list* of Hilbert polynomials. In principle one can explicitly find this list, which depends only on m, n and q, and does not depend on given pseudogroup PG. (Explicitly means that one uses only finite number of differentiations and algebraic operations.)

All results are true both in smooth and real analytic cases. In real analytic case domain R^∞ is a single atom and it's complement in J^∞ is contained in a hypersurface.

Many authors considered differential invariants and Tresse's theorem. We mention both classical works of Lie,Cartan and Tresse, and modern works of Ovsiannikov, Kumpera, Olver, Bryant, Kruglikov, Lychagin, Yumaguzhin, Morozov among others.

References

[1] R. Sarkisyan, *On differential invariants of geometric structures*, Izvestiya: Mathematics 70:2, 2006, 307–362.

[2] R. Sarkisyan, *On differential invariants of geometric structures II*, submitted for publication.

[3] R. Sarkisyan, I. Shandra, *Regularity and TresseTs theorem for geometric structures*, Izvestiya: Mathematics 72:2, 2008, 345–382.

[4] R. Sarkisyan, *Rationality of Poincare series in local problems of Analisys according to Arnold*, Izvestiya: Mathematics 74:2, 2010.

Rafael A. Sarkisyan,
Moscow State University / Financial Academy under the Government of the Russian Federation, Moscow, Russia,
e-mail: `rafael.sarkisyan@mail.ru`

Classes q_ω-,u_ω-compact and equationally Noetherian commutative semigroups are pairwise distinct

Artem N. Shevlyakov

The definitions of q_ω-,u_ω-compact and equationally Noetherian algebraic system play a key role in the universal algebraic geometry. M. Kotov constructed peculiar algebraic systems which distinguish all these classes. In other words, there is a u_ω-compact algebraic systems which is not equationally Noetherian and there is a q_ω-compact but not a u_ω-compact algebraic system.

Nevertheless, the following problem holds: try to distinguish these classes for a classical algebraic systems (groups, semigroups, boolean algebras etc).

In our work we constructed two commutative idempotent semigroups. The first one is u_ω-compact, but not equationally Noetherian. The second semigroup is q_ω-compact but not u_ω-compact.

Artem N. Shevlyakov,
Omsk Branch Institute of Mathematics SB RAS, Omsk, Russia,
e-mail: a_shevl@mail.ru

Syntactic generic constructions and ehrenfeucht theories

Sergey V. Sudoplatov

General principles of generic constructions, allowing to realize desirable structural properties step-by-step, will be discussed. These principles are based on aprioristic knowledge that is represented by a syntactic information (a system of types). A realizing semantic object (a structure) collects the syntactic system. The syntactic generic constructions have been illustrated by author's examples in the book [S. V. Sudoplatov, The Lachlan Problem. — Novosibirsk: NSTU, 2009 (to appear), available in: http://math.nsc.ru/∼sudoplatov/lachlan_eng.pdf]. These examples present realizations of possible basic characteristics (Rudin — Keisler preorders and distribution functions for numbers of limit models) for the class of Ehrenfeucht theories and, more generally, for the class of small theories.

The work is supported by RFBR grant No. 09-01-00336-a, and by the Council for Grants (under RF President) and State Aid of Fundamental Science Schools via project NSh-344.2008.1.

Sergey V. Sudoplatov,
Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia,
e-mail: `sudoplat@math.nsc.ru`

The fully residually F quotients of $F[x, y]$

Touikan Nicholas

We describe the fully residually free groups that arise from systems of equations over a free group F in two variables. As an application we can derive a description of the solutions of such systems of equations.

Touikan Nicholas,
McGill University, Montreal, Canada,
e-mail: `touikan@math.mcgill.ca`

Whitehead minimization, and computation of algebraic closures in polynomial time

Enric Ventura, Abodó Roig, Pascal Weil

The Whitehead minimization problem consists in finding a minimum size element in the automorphic orbit of a word (resp. a cyclic word or a finitely generated subgroup) in a finite rank free group F_n. We give the first fully polynomial algorithm to solve this problem, that is, an algorithm that is polynomial both in the length of the input word and in the rank of the ambient free group, n. Earlier (classical) algorithms had an exponential dependency on the ambient rank.

As an application, it follows that the primitivity problem (to decide whether a given word is an element of some basis of F_n) and the free factor problem (to decide, given two subgroups, whether one is a free factor of the other) can also be solved in polynomial time.

Another interesting application is the following: given an extension of subgroups of F_n, $H < K < F_n$, one can compute the algebraic closure (i.e. the smallest free factor of K containing H) in polynomial time with respect to the total length of the given generators for H and K (this was known to be computable, but the existing algorithm was exponential).

Enric Ventura,
Universitat Politecnica de Catalunya, Manresa, Spain,
e-mail: `enric.ventura@upc.edu`

Математическое моделирование распространения и контроля туберкулеза[1]

Константин Константинович Авилов

Туберкулез — одно из самых опасных инфекционных заболеваний. Туберкулез поражает преимущественно экономически активные слои населения, и поэтому он является социально значимым заболеванием, а борьба с которым включена в Цели развития тысячелетия ООН (UN Millennium Development Goals).

Распространение туберкулеза происходит преимущественно аэрогенным путем. Для туберкулеза характерна очень длительная стадия латентной инфекции. Порядка 90% инфицированных никогда не заболевают туберкулезом и остаются носителями латентной инфекции до конца жизни. Наиболее распространенная и наиболее эпидемически опасная форма туберкулеза — туберкулез органов дыхания (ТОД). Смертность при нелеченном ТОД составляет порядка 50%.

Математические модели процесса распространения и контроля туберкулеза используются для анализа статистических данных и для прогнозирования развития эпидемиологической ситуации — в том числе, и с учетом изменяющихся воздействий или условий. Последнее позволяет решать задачу оптимизации схемы противотубуркулезных мероприятий на популяционном уровне.

К настоящему времени опубликовано несколько десятков математических моделей, связанных с эпидемиологией туберкулеза. Большинство из них описывает процесс его распространения в целом, другие же модели описывают только отдельные "локальные" процессы — выявление больных, развитие болезни и т.п. В моделях, как правило, учитываются основные особенности туберкулеза: крайне длительная латентная стадия, зависимость удельного риска развития болезни от давности инфицирования, существование инфекционных и малоинфекционных форм туберкулеза и т.п. Обычно модели строятся для изучения влияния какого-либо одного фактора или группы факторов — влияния лечения и его параметров, развития лекарственной устойчивости, взаимодействия с другими инфекциями (прежде всего, с ВИЧ), влияния демографических параметров и т.п., но существуют и модели, делающие попытку описать одновременно все основные процессы, влияющие на распространение и контроль туберкулеза.

[1]Работа поддержана грантом РФФИ 07-01-00577-а и грантом Президиума РАН "Фундаментальные науки — медицине".

Основной проблемой математического моделирования распространения туберкулеза остается отсутствие “количественной” модели туберкулезных процессов (инфицирования, формирования латентной инфекции, развития и хода активной болезни) в рамках одного организма. Как следствие, большинство авторов математических моделей опирается на предположения или на литературные данные при выборе значений параметров своих моделей. К наиболее плохо описанным процессам относятся передача туберкулезной инфекции и развитие активной болезни.

Ситуация дополнительно осложняется тем, что все связанные с ним процессы имеют очень большую длительность (к примеру, средняя длительность болезни — несколько лет). Кроме того, длительная латентная стадия и низкая доля заболевающих среди инфицированных вместе с пожизненным характером инфекции сильно затрудняют наблюдение процесса инфицирования и суперинфицирования. В результате сбор данных, описывающих процесс распространения туберкулеза в целом становится крайне сложным и дорогостоящим. Одним из способов преодоления этой проблемы может стать детальный анализ систематически собираемых поперечных данных и проведение дополнительных выборочных исследований.

Константин Константинович Авилов,
Институт вычислительной математики РАН, Москва, Россия,
e-mail: avilov@inm.ras.ru

CT-нильпотентные группы

Михаил Георгиевич Амаглобели

Большую роль в теории групп является понятие CT-группы.

Класс CT-групп определяется следующей универсальной аксиомой:

$$CT : \forall x \neq 1, y, z \ [y, x] = 1 \wedge [z, y] = 1 \mapsto [y, z] = 1.$$

К сожалению, это понятие не работает в классе нильпотентных групп, так как централизатор любого неединичного центрального элемента в любой неабелевой нильпотентной группе не является абелевым. Имея ввиду приложение к нильпотентным группам вводится новое понятие:

Определение. *Группа G называется CT_1-группой, если для любого нецентрального элемента x, централизатор $C(x)$ является абелелевой подгруппой в G. Это высказывание можно записать в виде универсальной формулы:*

$$CT_1 : \forall x, y, z, t \ \{[x, t] \neq 1 \wedge [x, y] = 1 \wedge [x, z] = 1 \mapsto [y, z] = 1\}.$$

В докладе будут представлены основные свойства класса CT_1-нильпотентных групп, а также приложения этих результатов к проблеме описания неприводимых координатных групп для двуступенно нильпотентных $\mathbb{Q}$-групп.

Михаил Георгиевич Амаглобели,
Тбилисский государственный университет, Тбилиси, Грузия

Σ^0-вычислимость и определимость над алгебраическими системами

Игорь Викторович Ашаев

Рассматривается вычислимость над алгебраическими системами с помощью машин в списочной надстройке [1]. Это обобщение понятия вычислимости в вещественных числах из работы [2]. Существуют также немашинные подходы к определению вычислимости в произвольных алгебраических системах, в частности, таковым является Σ-вычислимость из [3]. Цель работы — показать, что класс функций, вычислимых посредством машин в списочной надстройке, может быть задан аналогично Σ-вычислимости как класс функций, определимых в системе формулами специального вида.

Пусть $\mathcal{A} = \langle A; \sigma \rangle$ — алгебраическая система с основным множеством A и сигнатурой σ. Σ^0-формулой сигнатуры σ назовём формулу, построенную из бескванторных формул логики предикатов первого порядка с помощью конъюнкций, дизъюнкций, а также дизъюнкций бесконечных множеств уже построенных формул, имеющих рекурсивно перечислимое множество номеров.

Σ^0-формулу назовём функциональной, если это дизъюнкция (возможно, бесконечная), в которой каждое слагаемое имеет вид

$$\varphi_1(\overline{x}) \wedge \ldots \wedge \varphi_k(\overline{x}) \wedge y = t(\overline{x}), \quad \overline{x} = x_1, \ldots, x_n,$$

где φ_i — бескванторные формулы, t — терм сигнатуры σ, причём разные слагаемые дизъюнкции содержат контрарную пару φ_i и $\neg\varphi_i$.

Теорема 1. *Функция $f : A^n \to A$ вычислима в системе $\mathcal{A} \Longleftrightarrow f$ определима в $\mathcal{A}$ функциональной Σ^0-формулой.*

Используя Σ^0-формулы, можно развить понятие Σ^0-определимости алгебраических систем, аналогичную работе [3]. Такая определимость будет сохранять классы функций, вычислимых с помощью машин в смысле работы [1].

Теорема 2. *Пусть алгебраическая система $\mathcal{A}$ Σ^0-определима в системе $\mathcal{B}$. Тогда существует трансляция ρ такая, что для любой функции $f : A^n \to A$, вычислимой в $\mathcal{A}$, функция $\rho(f)$ вычислима в системе $\mathcal{B}$.*

Литература

[1] И.В. Ашаев, В.Я. Беляев, А.Г. Мясников, *Подходы к теории обобщённой вычислимости*, Алгебра и логика, **32** (4), 1993, 349–386.

[2] L. Blum, M. Shub, S. Smale, *On a theory of computation and complexity over the real numbers: NP-completeness, recursive functions and universal machines*, Bull. Amer. Math. Soc., **21** (1), 1989, 1–46.

[3] Yu.L. Ershov, *Definability and computability*, New York: Plenum, Siberian School of Algebra and Logic, 1996.

Игорь Викторович Ашаев,
Омский государственный университет, Омск, Россия,
e-mail: `ashaev@math.omsu.omskreg.ru`

О системах уравнений с гармоническими многочленами

Виктор Матвеевич Гичев

Обозначим через $\mathcal{H}_m^n$ множество всех вещественных гармонических (т.е. удовлетворяющих уравнению Лапласа $\Delta u = 0$) однородных полиномов степени n на $\mathbb{R}^{m+1}$. Это инвариантное неприводимое пространство группы $\mathrm{SO}(m+1)$, каждая функция $u \in \mathcal{H}_m^n$ однозначно определяется своими значениями на единичной сфере S^{m-1} в $\mathbb{R}^m$, а сужение $u\big|_{S^{m-1}}$ является собственной функцией оператора Лапласа–Бельтрами, отвечающей собственному значению $\lambda_n = n(n+m-2)$. В работе [3] было доказано, что две собственные функции оператора Лапласа–Бельтрами, соответствующие одному и тому же собственному числу $\lambda \neq 0$, на компактном многообразии с тривиальными первыми когомологиями де Рама имеют общий нуль. Возникает вопрос: насколько массивным может быть множество общих нулей нескольких собственных функций? Сформулируем чуть более общий вопрос, относящийся к сферам: насколько большим может быть множество решений системы уравнений $u_j(x) = 0$, $j = 1, \ldots, k$, где $u_j \in \mathcal{H}_m^{n_j}$? Естественным измерителем массивности является мера Хаусдорфа размерности $m-k$, при $m = k$ совпадающая с количеством точек в множестве. В работе [5] получены оценки сверху и снизу и найдены средние значения мер Хаусдорфа множеств решений для сфер. Например, при $m = 2$, $n_1 = n_2 = n$, точная оценка сверху для количества точек в множестве общих нулей двух полиномов при условии его конечности равна $2n^2$, доказанной оценки снизу нет (но есть эмирическая оценка $2n$), а среднее количество общих нулей равно $n(n+1)$. Результат о средних значениях подтверждает предположение Л. Полтеровича о том, что они подчиняются некоторой “теореме Безу в среднем”. Кроме того, средние можно вычислить в случае, когда в правых частях не нули, а произвольные вещественные числа (при этом надо нормировать функции), для более широкого, чем сферы, класса изотропно неприводимых однородных пространств, а также для наборов конечных сумм пространств $\mathcal{H}_m^n$.

Стоит отметить, что для $k = 1$ имеется гипотеза Яу, согласно которой мера Хаусдорфа множества общих нулей оценивается снизу и сверху как $C\sqrt{\lambda}$, где C — константа, зависящая лишь от геометрии многообразия, λ — собственное число. Она доказана в статье [1] для вещественно-аналитических многообразий; для сфер можно получить точные оценки сверху (но не снизу).

В работе [4] было введено свойство разделения, в некотором смысле измеряющее массивность подмножеств линейного пространства:

X обладает им, если $X \cap H$ линейно порождает H для любой гиперплоскости H. Из одного утверждения работы [5] следует выполнение этого свойства для орбит вещественных неприводимых представлений связных компактных групп (в статье [4] рассматривался случай алгебаически замкнутого поля и алгебраической группы). Для комплексных неприводимых представлений связных компактных групп можно доказать следующее: любая орбита пересекает любую наперед заданную гиперплоскость. Это дает ответ на вопрос, заданный в [2].

Литература

[1] H. Donnelly, C. Fefferman, *Nodal sets of eigenfunctions on Riemannian manifolds*, Invent. Math., **93** (1), 1988, 161-–183.

[2] J. Galindo, P. de la Harpe, T. Vust, *Two observations on irreducible representations of groups*, J. Lie Theory, **12**, 2002, 535—538.

[3] V.M. Gichev, *A note on common zeroes of Laplace–Beltrami eigenfunctions*, Ann. of Global Anal. and Geom, **26**, 2004, 201–208.

[4] H. Kraft, N.R. Wallach, *On the separation property of orbits in representation spaces*, J. Algebra, **258**, 2002, 228–254.

[5] В.М. Гичев, *Несколько замечаний о сферических гармониках*, Алгебра и Анализ, **20** (4), 2008, 64–86.

Виктор Матвеевич Гичев,
Омский филиал Института математики СО РАН, Омск, Россия,
e-mail: `gichev@ofim.oscsbras.ru`

Описание полных теорий минимаксных систем,

Юрий Сергеевич Дворжецкий

Многие результаты в выпуклом программировании, в разделах математического анализа, связанных с теоремами о делимости, основаны на свойствах двух функций — минимума и максимума.

В настоящем докладе мы предлагаем два подхода для формализации доказательств соответствующих результатов на языке теории моделей.

Для проведения доказательств нам необходимо задать набор аксиом A, которым удовлетворяют функции минимума max или максимума min. Мы рассматриваем широкий класс алгебраических систем, на которых интерпретируется функции max или min и справедливы аксиомы из множества A. В качестве основного языка мы рассматриваем язык $L = \langle \max \rangle$, состоящий из одной бинарной операции (не имеет принципиального значения, минимумом или максимумом интерпретируется символ max).

Нашей задачей является описание полных теорий языка L, включающих в себя все предложения из набора аксиом A.

В качестве аксиом A мы рассматриваем два набора, приведённых ниже.

Система аксиом $A1$:

$$\forall\, x, y \quad \max(x, y) = \max(y, x),$$

$$\forall\, x, y \quad \max(x, y) = x \vee \max(x, y) = y,$$

$$\forall\, x, y, z \quad \max(x, \max(y, z)) = \max(\max(x, y), z).$$

Система аксиом $A2$:

$$\forall\, x, y \quad \max(x, y) = \max(y, x),$$

$$\forall\, x, y \quad \max(x, y) = x \vee \max(x, y) = y.$$

Результатам, полученным при описании полных теорий языка L, содержащим в себе $A1$ или $A2$, будет посвящён доклад.

Юрий Сергеевич Дворжецкий,
Омский государственный университет, Омск, Россия,
e-mail: dvorzhetskij@mail.ru

Ациклические схемы баз данных

Сергей Владимирович Зыкин

Свойство ацикличности схем баз данных достаточно полно исследовано в работах [1,2]. Это свойство используется при логической оптимизации запросов к базе данных [2,3]. В работе [4] свойство ацикличности схемы используется для автоматизации формирования многомерных представлений данных. В данной работе предлагается к рассмотрению обобщение на случай, когда отношения базы данных могут иметь несколько первичных ключей.

Пусть задана совокупность всех отношений реляционной БД: $R = \{R_1, R_2, \dots, R_q\}$ -— результат декомпозиции при нормализации отношений, для которой отсутствуют i и j такие, что $[R_i] \subseteq [R_j]$ при $i \neq j$, где $[R_i]$ -— совокупность атрибутов (схема отношения). $U = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ — множество всех атрибутов, на которых заданы отношения из совокупности R.

Определение 1. Пусть $R_i[A_1, \dots, A_m]$ и $R_j[B_1, \dots, B_p]$ -— схемы отношений (не обязательно различные), $V \subseteq \{A_1, \dots, A_m\}$ и $W \subseteq \{B_1, \dots, B_p\}$, $|V| = |W|$, тогда объект $R_i[V] \subseteq R_j[W]$ называется зависимостью включения.

В определении |V| — мощность множества V, выражение $R_i[V] \subseteq R_j[W]$ -— подразумевает, что кортежи $R_i[V]$ содержатся в $R_j[V]$. Далее будем предполагать, что условие $V = W$ является необходимым для установления связи. Такой вид зависимостей включения называется типизированными [5,6].

Введём обозначения: $PK(R_i)$ или просто $PK(i)$ — множество атрибутов, являющихся первичным ключом в отношении R_i. В отношении R_i может существовать несколько альтернативных первичных ключей; $L_1(i,j)$ -— связь 1:1 от R_i к R_j, где R_i главное отношение; $L_M(i,j)$ — связь 1:M от R_i к R_j, где R_i главное отношение; $L(i,j)$ —- связь 1:1 либо 1:M от R_i к R_j, где R_i — главное отношение.

Определение 2. Между отношениями R_i и R_j существует связь $L_1(i,j)$, если $PK(R_i) = PK(R_j)$ и для любых реализаций R_i и R_j, выполнено $R_j[X] \subseteq R_i[X]$, где $X = R_i \cap R_j$.

Определение 3. Между отношениями R_i и R_j существует связь $L_M(i,j)$, если $PK(R_i) \neq PK(R_j)$ и $PK(R_i) \subseteq R_j$.

Определение 4. Совокупность отношений R будем называть ациклической, если не существует упорядоченное подмножество отношений

$$\{R_{m(1)}, R_{m(2)}, \dots, R_{m(s)}\}$$

такое, что выполнено:

$$L(m(1), m(2)), L(m(2), m(3)), \ldots, L(m(s-1), m(s)), L(m(s), m(1)),$$

$s > 1$, в противном случае совокупность отношений R будем называть циклической.

Теорема 1. Если совокупность R циклическая, то ассоциированный с ней гиперграф также будет циклическим (обратное не верно).

Определение 5. Связь $L(i, j)$ является избыточной, если задаваемые ею ограничения на значения атрибутов содержатся в других связях.

Теорема 2. Связь $L(i, j)$ является избыточной, если существуют связи:

$$L(i, m(1)), L(m(1), m(2)), \ldots, L(m(p-1), m(p)), L(m(p), j)$$

и

$$PK(i) \subseteq R_{m(s)}, s = 2, 3, \ldots, p,$$

где m -— массив номеров отношений.

Литература

[1] C. Beeri, R. Fagin, D. Maier, M. Yannakakis, *On the Desirability of Acyclic Database Schemes*, ACM, **30** (3), 1983, 479–513.

[2] D. Maier, *The theory of relational databases*, Computer Science Press, 1983, 637 p.

[3] С.Д. Кузнецов, *Логическая оптимизация запросов в реляционных СУБД*, Программирование, **6**, 1989, 46–59.

[4] С.В. Зыкин, *Актуализация базы данных в OLAP-технологии*, Материалы Всероссийской конференции с международным участием "Знания - Онтологии - Теории", Новосибирск, **1**, 2007, 73–79.

[5] R. Missaoui, R. Godin, *The Implication Problem for Inclusion Dependencies: A Graph Approach*, SIGMOD Record, **19** (1), 1990, 36–40.

[6] M. Levene, M.W. Vincent, *Justification for Inclusion Dependency Normal Form*, IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, **12** (2), 2000, 281–291.

Сергей Владимирович Зыкин,
Омский филиал Института математики СО РАН, Омск, Россия,
e-mail: zykin@ofim.oscsbras.ru

Верхние оценки среднего времени вырождения популяции с постоянной потенциальной ёмкостью среды

Сергей Александрович Клоков

Пусть $K > 0$ — потенциальная ёмкость биологической системы с неперекрывающимися поколениями и индивидуумами одного типа. Для отдельного индивидуума распределение потомства зависит от текущего размера популяции следующим образом. Если в текущем поколении имеется k индивидуумов, то каждый из них производит случайное число потомков, имеющее распределение Пуассона с параметром $\frac{2}{1+(k/K)}$ независимо от остальных. Если размер популяции меньше (больше) K, то в среднем производится больше (меньше) одного потомка, поэтому динамика популяции описывается надкритическим/докритическим ветвящимся процессом. В начале размер популяции весьма быстро приближается к уровню K и затем, после весьма продолжительных осцилляций около этого уровня, вырождается.

Пусть X_n — размер популяции в n-м поколении. Последовательность случайных величин (X_n) есть однородная цепь Маркова с пространством состояний $\mathbb{Z}_+$. Состояние 0 является поглощаюшим и $\inf_{k>0} p_{k,0} = e^{-2K} > 0$, так что любая популяция вырождается с вероятностью 1. Пусть τ_k — случайное время до вырождения популяции, имевшей в самом начале размер k. Вероятность вырождения за единицу времени составляет не менее e^{-2K} и сравнение с геометрическим распределением с параметром $p = e^{-2K}$ даёт грубую оценку среднего времени вырождения:

$$\mathbb{E}\tau_k \le \frac{1}{\inf_{k>0} p_{k,0}} = e^{2K}. \quad (1)$$

Интересно получение более реалистичных оценок для $\mathbb{E}\tau_k$. Нами показано, что справедлива верхняя оценка вида $\sup_k \mathbb{E}\tau_k \le Ce^{cK}$, где показатель субэкспоненты $c = 0.707$.

Теорема. *Пусть $K \ge 9$ — потенциальная ёмкость биологической среды. Если размер популяции равен k, то каждый индивидуум производит пуассоновское число потомков с параметром $\frac{2}{1+(k/K)}$ и потом погибает. Пусть $[x]$ обозначает целую часть числа x, $\alpha = \frac{[0.4974 \cdot K]}{K}$, $\beta = \frac{[0.2899 \cdot \alpha K]}{\alpha K}$,*

$$g(\alpha,\beta) = 1 - \alpha + \alpha \ln \alpha + \frac{2\alpha}{1+\alpha} - \alpha\beta - \alpha\beta \ln \frac{2}{(1+\alpha)\beta} + \frac{2\alpha\beta}{1+\alpha\beta}, \quad (2)$$

и m такое целое число, что выполнено неравенство

$$\log_2(1+\sqrt{K})+3 \le m < \log_2(1+\sqrt{K})+4. \qquad (3)$$

Тогда для времени вырождения τ_k популяции начального размера k выполнена следующая оценка:

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\tau_k \le 103(1-\alpha)(2-(1+\alpha)\beta)\alpha\sqrt{\beta}K(m+1)2.5^{m-3}e^{g(\alpha,\beta)K}. \qquad (4)$$

Работа поддержана грантами РФФИ 06–01–00127, 09–01–00105, и грантом НШ–3695.2008.1 фонда президента Российской Федерации.

Сергей Александрович Клоков,
Омский филиал Института математики СО РАН, Омск, Россия,
e-mail: `s-klokov@yandex.ru`

Сравнение классов нётеровых по уравнениям, слабо нётеровых по уравнениям и q_ω-компактных алгебраических систем

Матвей Владимирович Котов

В работах Э. Ю. Данияровой, А. Г. Мясникова, В. Н. Ремесленникова по универсальной алгебраической геометрии введены классы нётеровых по уравнениям, слабо нётеровых по уравнениям и q_ω-компактных алгебраических систем, обозначаемые $\mathbf{N}$, $\mathbf{N}'$ и $\mathbf{Q}$ соответственно.

Пусть $\mathcal{L}$ — язык без предикатных символов; $\mathcal{A}$ — алгебраическая система языка $\mathcal{L}$ с носителем A; $\mathbf{x}$, $|\mathbf{x}| = n$, — набор переменных. Под *уравнениями* в языке $\mathcal{L}$ от переменных $\mathbf{x}$ мы понимаем атомарные формулы языка $\mathcal{L}$ от переменных $\mathbf{x}$. Любое множество уравнений в языке $\mathcal{L}$ от переменных $\mathbf{x}$ называется *системой уравнений* в языке $\mathcal{L}$ от переменных $\mathbf{x}$.

Набор $\mathbf{a} \in A^n$ называется *решением* системы уравнений $S(\mathbf{x})$ языка $\mathcal{L}$, если при интерпретации переменных $\mathbf{x}$ элементами из $\mathbf{a}$ каждая формула из S принимает истинное значение.

Системы уравнений $S_1(\mathbf{x})$ и $S_2(\mathbf{x})$ языка $\mathcal{L}$ называются *эквивалентными* над алгебраической системой $\mathcal{A}$, если множества всех решений из A^n для систем S_1 и S_2 совпадают. Уравнение $s(\mathbf{x})$ называется *следствием* системы $S(\mathbf{x})$ над $\mathcal{A}$, если каждое решение системы S из A^n является решением уравнения s.

Алгебраическая система $\mathcal{A}$ языка $\mathcal{L}$ называется *нётеровой по уравнениям*, если для любого целого положительного числа n и любой системы уравнений $S(\mathbf{x})$ языка $\mathcal{L}$, $|\mathbf{x}| = n$, найдётся её конечная подсистема S_0, эквивалентная системе S над $\mathcal{A}$.

Алгебраическая система $\mathcal{A}$ языка $\mathcal{L}$ называется *слабо нётеровой по уравнениям*, если для любого целого положительного числа n и любой системы уравнений $S(\mathbf{x})$ языка $\mathcal{L}$, $|\mathbf{x}| = n$, найдётся конечная система $S_0(\mathbf{x})$ языка $\mathcal{L}$, эквивалентная системе S над $\mathcal{A}$.

Алгебраическая система $\mathcal{A}$ языка $\mathcal{L}$ называется q_ω*-компактной*, если для любого целого положительного числа n, любой системы уравнений $S(\mathbf{x})$ языка $\mathcal{L}$, $|\mathbf{x}| = n$, и любого следствия s системы S над $\mathcal{A}$ найдётся конечная подсистема S_0 системы S такая, что s есть следствие системы S_0 над $\mathcal{A}$.

Из определений следует, что

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}' \cap \mathbf{Q}.$$

Мы строим примеры алгебраических систем, которые показывают, что

$$\mathbf{N} \subsetneq \mathbf{N}' \quad \text{и} \quad \mathbf{N} \subsetneq \mathbf{Q}.$$

Матвей Владимирович Котов,
Омский государственный университет, Омск, Россия,
e-mail: ilab24@yandex.ru

Усредненная функция Дена относительно заданной вероятности

Екатерина Георгиевна Кукина

Пусть $X = \{x_1, \ldots, x_r\}$ — конечный алфавит. Обозначим через $\Sigma(X)$ свободный моноид на множестве $X \cup X^{-1}$, где $X^{-1} = \{x_1^{-1}, \ldots, x_r^{-1}\}$ — множество формально обратных элементов. Элементы моноида $\Sigma(X)$ будем называть словами. Обозначим через $|w|$ длину слова w. Покажем, как в соответствии с идеями статьи [2] можно ввести на моноиде $\Sigma(X)$ вероятностную меру.

Определение. *Функцию $\gamma : \Sigma(X) \to \mathbb{N}$ будем называть сложностью, если она имеет конечное слоение, т.е. для всех k выполнено условие $card\, \Gamma_k < \infty$, где $\Gamma_k = \{w \in \Sigma(X) \,|\gamma(w) = k\}$.*

Пусть на множестве $\mathbb{N}$ построена некоторая вероятность $\{p_k = P\{\xi = k\}\}$. Это позволяет определить вероятность на моноиде $\Sigma(X)$ следующим образом:

$$\forall w \in \Gamma_k \;\; p(w) = P\{\xi = w\} = \pi_k = \frac{p_k}{\mathrm{card}\, \Gamma_k}, \tag{1}$$

т.е. $P\{\xi \in \Gamma_k\} = p_k$, а все элементы множества Γ_k равновероятны.

Пусть G — произвольная конечно-определённая группа, представленная как фактор-группа $F(X)/R$ свободной группы $F(X)$ конечного ранга r с множеством свободных порождающих X по нормальной подгруппе $R = ncl(r_1, \ldots, r_m)$. Обозначим через $\mathfrak{P}(G = \langle x_1, \ldots, x_r \,|r_1, \ldots, r_m \rangle)$ соответствующее представление группы G с помощью порождающих элементов и определяющих соотношений. Любое слово w моноида $\Sigma(X)$ однозначно определяет элемент группы $F(X)$, а естественный гомоморфизм $\phi : F(X) \to G$ позволяет говорить о значении слова w в группе G. В частности, запись $w =_G v$ $(w =_{F(X)} v)$ понимается так, что значения слов w и v в группе G (или в F(X)) совпадают.

Заметим, что равенство $w =_G 1$ эквивалентно тому, что существует запись вида

$$w =_{F(X)} g_1 g_2 \cdots g_s, \tag{2}$$

где $g_j = r_{j_i}^{f_i}$ для некоторого $f_j \in F(X)$, $\varepsilon_j \in \pm 1, i_j \in \{1, \ldots, m\}, j \in \{1, \ldots, s\}$. Как обычно, запись g^f означает сопряжение $f^{-1} g f$.

Определение. *Площадью S_w слова $w =_G 1$ относительно представления $\mathfrak{P}(G)$ называется наименьшее значение s, для которого существует запись вида (2).*

Площадь слова $w =_{F(X)} 1$ полагается равной 0.

Определим множество $\Omega_k = \{w =_G 1 \big| |w| \le k\}$ слов из моноида $\Sigma(X)$, значения которых в группе G равны 1, а длина не превосходит фиксированного числа k.

В статье [1] М. Громов вводит следующее

Определение. *Усреднённой функцией Дена группы G относительно представления $\mathfrak{P}(G)$ называется функция*

$$\sigma(k) = \frac{\sum_{w \in \Omega_k} S_w}{card\, \Omega_k} \tag{3}$$

Усреднение при определении функции $\sigma(k)$ происходит в соответствии с равномерной вероятностью на множестве Ω_k. Существует другая возможность определения усреднённой функции. Например, с учётом подхода из работы [2] усреднённая функция Дена может быть определена в соответствии со сложностью γ и распределением $\{p_k\}$.

В этом случае определим множество $\Omega'_k = \{w =_G 1 \big| \gamma(w) \le k\}$ слов из моноида $\Sigma(X)$, значения которых в группе G равны 1, а сложность не превосходит фиксированного числа k.

Определение. *Относительной усреднённой функцией Дена группы G, отвечающей представлению $\mathfrak{P}(G)$, сложности $\gamma(w)$ и вероятности $\{p_k\}$, назовём функцию*

$$\zeta_{\gamma,\{p_k\}}(k) = \zeta(k) = \frac{\sum_{w \in \Omega'_k} p(w) S_w}{p(\Omega'_k)}. \tag{4}$$

Корректность последнего определения обеспечивается следующим свойством распределения $\{p_k\}$.

Определение. *Распределение $\{p_k\}$ назовём хорошим, если $p_k \ne 0$ для всех k.*

Только для хороших распределений вероятность любого непустого подмножества $\Sigma(X)$ не равна 0. Это одно из требований, накладываемых на распределения в работе [2].

Оказывается, что при некоторых (не слишком жестких) ограничениях на распределение $\{p_k\}$ и саму группу G, относительная усредненная функция Дена этой группы ограничена сверху константой. Кроме того, относительная усредненная функция Дена для произвольной группы в произвольном представлении (за исключением свободной группы в естественном представлении) ограничена снизу положительной константой. В исключительном же случае свободной группы в естественном представлении относительная усредненная функция Дена тождественно равна нулю.

Литература

[1] M. Gromov, *Asymptotic invariants of infinite groups, in Geometric Group Theory*, LMS Lecture Notes, 182 eds. G.A.Niblo and M.A.Roller, Cambridge Univercity Press, 1993.

[2] A.V. Borovik, A.G. Myasnikov, V. Shpilrain, *Measuring sets in infinite groups*, Contemp. Math., **298**, 2002, 21–42.

[3] Е.Г. Кукина, В.А. Романьков, *Субквадратичность усредненной функции Дена для свободных абелевых групп*, Сиб. мат. журн., **44** (4), 2004, 772–778.

[4] Е.Г. Кукина, *Усредненная функция Дена относительно заданной вероятности*, Сиб. мат. журн., **47** (2), 2006.

Екатерина Георгиевна Кукина,
Омский государственный университет, Омск, Россия,
e-mail: katpop@ya.ru

Статистическое моделирование динамики конкурирующих популяций в условиях воздействия вредных веществ

Константин Константинович Логинов

Рассматривается стохастическая модель динамики конкурирующих популяций, особи которых подвержены воздействию вредных веществ, поступающих в составе ресурсов питания. Динамика численности популяций $x(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t))$ описывается с помощью неоднородного нелинейного случайного процесса рождения и гибели. Изменение $x(t)$ задаётся через рекуррентные соотношения

$$\begin{gathered} t_k = t_{k-1} + \tau_k, \quad x(t_k) = x(t_{k-1}) + \eta_k, \quad k = 1, 2, \dots, \\ t_0 = 0, \quad x(t_0) = x^{(0)}. \end{gathered} \tag{1}$$

В формулах (1) случайные величины τ_k означают продолжительности периодов времени до очередного изменения $x(t_k)$, а векторные случайные величины η_k описывают приращение $x(t_{k-1})$. Законы распределения величин $\{\tau_k, \eta_k, k = 1, 2, \dots\}$ выводятся из соотношений, отражающих производство потомства и гибель особей вследствие самолимитирования и конкуренции, а также необратимого влияния на них потребляемых вредных веществ.

Поступление, распад и потребление вредных веществ задаётся с помощью дифференциальных уравнений, правые части которых содержат случайную составляющую $x(t)$. На промежутках времени $t \in [t_{k-1}, t_k), k = 1, 2, \dots,$ количество вредных веществ $c_i(t)$ изменяется по следующему закону

$$\frac{dc_i}{dt} = r_i(t) - \theta_i(c_i) \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}\, x_j(t_{k-1}) - \delta_i\, c_i, \quad c_i(t_{k-1}) = c_i^{(k-1)}, \quad 1 \le i \le m. \tag{2}$$

В уравнениях (2) слагаемые $\theta_i(c_i) \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}\, x_j(t_{k-1})$ описывают скорости потребления особями вредных веществ i-го типа, входящих в состав пищевых ресурсов. Скорости поступления вредных веществ в среду обитания особей представлены функциями $r_i(t)$, а скорости их распада — слагаемыми $\delta_i\, c_i$. Под $\frac{dc_i}{dt}$ понимаются правосторонние производные, $1 \le i \le m$.

Для проведения вычислительных экспериментов применяется метод Монте-Карло. Алгоритмы моделирования моментов $\{t_k, k = 1, 2, \dots\}$

и правил изменения $x(t_k)$ (формулы (1)) опираются на схему, аналогичную схеме моделирования свободного пробега нейтронов в неоднородной среде («метод максимального сечения»). Для построения экономичных алгоритмов используются оценки сверху на решения дифференциальных уравнений (2) и функций $\theta_i(c_i), 1 \leq i \leq m$. Уравнения (2) решаются с помощью стандартных численных методов. Используемые алгоритмы допускают естественное распараллеливание и удобны для реализации на многопроцессорных ЭВМ.

Представлены результаты моделирования наиболее характерных режимов динамики $x(t)$, включая режим вырождения популяций и режим перехода с одного стационарного уровня $x(t)$ на другой под влиянием выбросов вредных веществ.

Константин Константинович Логинов,
Омский филиал Института математики СО РАН, Омск, Россия,
e-mail: kloginov85@mail.ru

Об основаниях алгебраической геометрии над проконечными группами

Светлана Григорьевна Мелешева

В работах [1, 2] изложены основы алгебраической геометрии над группами и другими алгебраическими системами. Мы рассматриваем случай проконечных групп, которые по определению являются проективными пределами конечных групп с соответствующей топологией. На этот случай стандартные определения буквально не переносятся.

Для проконечных групп вводятся понятия уравнения, алгебраического множества, топологии Зарисского, координатной группы.

Алгебраическая геометрия над (проконечной) группой G является достаточно хорошей лишь в том случае, если эта группа являлась нетеровой по уравнениям, т.е. для всякого n произвольная система уравнений от $x_1, \dots, x_n$ над G должна быть эквивалентна некоторой своей конечной подсистеме.

Пусть проконечная группа G является обратным пределом $\varprojlim G_i$ конечных групп G_i. Обозначим через $\pi(G) = \cup\pi(G_i)$ - множество простых делителей порядков групп G_i. Нами доказаны

Теорема 1. *Если множество $\pi(G)$ бесконечно, то проконечная группа G не нетерова по уравнениям от одной переменной.*

Теорема 2. *Если проконечная группа G абелева и множество $\pi(G)$ конечно, то группа G нетерова по уравнениям.*

Работа выполнена при поддержке АВЦП Рособразования “Развитие научного потенциала высшей школы” (проект 2.1.1.419).

Литература

[1] G. Baumslag, A. Myasnikov, V. Remeslennikov, *Algebraic geometry over groups I: Algebraic sets and ideal theory*, J. Algebra, **219** (1), 1999, 16–79.

[2] A. Myasnikov, V. Remeslennikov, *Algebraic geometry over groups II: Logical foundations*, J. Algebra, **234** (1), 2000, 225–276.

Светлана Григорьевна Мелешева,
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия,
e-mail: `melesheva_s@ngs.ru`

Сравнение понятий геометрической эквивалентности и универсальной геометрической эквивалентности в классе частично коммутативных двуступенно нильпотентных $\mathbb{Q}$-групп

Алексей Александрович Мищенко

Доклад посвящён некоторым результатам об алгебраической геометрии над частично коммутативными двухступенно нильпотентными $\mathbb{Q}$-группами. По конечному простому графу Γ (без петель и кратных ребер, с множеством рёбер $E(\Gamma)$) в многообразии двуступенно нильпотентных $\mathbb{Q}$-групп строится *частично коммутативная* группа G_Γ с помощью порождающих и определяющих соотношений. Множеством порождающих будет множество вершин графа $V(\Gamma) = \{a_1, \ldots, a_n\}$, а множеством определяющих соотношений множество $R_\Gamma = \{[a_i, a_j] = 1 | \ (a_i, a_j) \in E(\Gamma)\}$.

Основные понятия и определения универсальной алгебраической геометрии над алгебраическими системами можно найти в статье [1].

Пусть $L = \langle *, ^{-1}, =, 1\rangle$ групповой язык без констант. Две группы A и B называются *геометрически эквивалентными* в языке L, если для любого натурального числа n и для любой системы уравнений S от n переменных имеет место равенство радикалов: $\mathrm{Rad}_A(S) = \mathrm{Rad}_B(S)$.

Теорема. *Пусть G_{Γ_1} и G_{Γ_2} — две неабелевых частично коммутативных двухступенно нильпотентных $\mathbb{Q}$-группы. Тогда G_{Γ_1} и G_{Γ_2} геометрически эквивалентны.*

Ещё одним важным понятием является понятие универсальной геометрической эквивалентности. Две группы A и B называются *универсально геометрически эквивалентными* в языке L, если для любого натурального числа n и для любой системы уравнений S от n переменных имеет место равенство радикалов: $\mathrm{Rad}_A(S) = \mathrm{Rad}_B(S)$, и радикал $\mathrm{Rad}_A(S)$ неприводим над A тогда и только тогда, когда радикал $\mathrm{Rad}_B(S)$ неприводим над B.

Теорема. *Две частично коммутативные двухступенно нильпотентные $\mathbb{Q}$-группы G_{Γ_1} и G_{Γ_2} универсально геометрически эквивалентны тогда и только тогда, когда $\Phi(G_{\Gamma_1}) = \Phi(G_{\Gamma_2})$.*

Здесь множество $\Phi(G_{\Gamma_i})$ означает множество всех экзистенциальных формул специального вида $\phi(T)$, выполненых на группе G_{Γ_i}. Формула $\phi(T)$ строится по конечному графу T следующим образом: каждой вершине графа T ставится в соответствие одна из букв

$z_1, \ldots, z_n$ формулы $\phi(T)$, где $|V(T)| = n$. А сама формула имеет вид:

$$\phi(T) = \exists z_1 \ldots z_n (\bigwedge [z_i, z_j] = 1 \wedge \bigwedge [z_k, z_l] \neq 1 \wedge \bigwedge_{i \neq j} z_i \neq z_j \wedge \bigwedge_i z_i \neq 1),$$

где $[z_i, z_j] = 1$ тогда и только тогда, когда вершины, соответствующие z_i и z_j в графе T, соединены ребром, и $[z_k, z_l] \neq 1$ если вершины, соответствующие z_k и z_l в графе T, не соединены ребром.

В докладе также приводится пример двух групп, которые являются геометрически эквивалентными, но не являются универсально геометрически эквивалентными.

Литература

[1] E. Daniyarova, A. Myasnikov, V. Remeslennikov, *Unification theorems in algebraic geometry*, Algebra and Discrete Mathematics, **1**, 2008, http://arxiv.org/abs/0808.2522.

Алексей Александрович Мищенко,
Омский филиал Института математики СО РАН, Омск, Россия,
e-mail: alexei.mishenko@gmail.com

Сильная альтернатива Титса дла групп Кокстера

Геннадий Андреевич Носков

В докладе планируется рассказать доказательство следующего результата: Теорема. Всякая подгруппа группы Костера конечного ранга является либо конечным расширением свободной абелевой группы либо содержит подгруппу конечного индекса допускающую эпиморфизм на свободную неабелеву группу.

Геннадий Андреевич Носков,
Омский филиал Института математики СО РАН, Омск, Россия,
e-mail: g.noskov@gmail.com

Региональный индекс риска инфицирования ВИЧ на основе факторов социальной дезадаптации

Екатерина Александровна Носова

В работе построен индекс риска инфицирования ВИЧ, позволяющий оценивать ожидаемый уровень новых случаев заражения, по данным об уровне социальной дезадаптации и социально-экономическими условиями в регионах России. Для вычисления индекса используются доступные статистические данные.

Проблема распространения вируса иммунодефицита человека является одной из самых серьезных проблем здравоохранения. ВИЧ-инфекция — социально обусловленное заболевание, основными факторами риска которого являются наркозависимость и рискованное сексуальное поведение. Известно, что в РФ основное количество случаев заражения ВИЧ связано с группами риска, которые рекрутируются из основной популяции в результате социальной дезадаптации. Поэтому актуальной является проблема снижения скорости распространения вируса в группах риска, составляющих основной резервуар инфекции.

Признаками социальной дезадаптациии являются различные виды девиантного поведения: алкоголизм, наркомания, аморальное поведение, детская беспризорность, и другие нарушения социальных, правовых и нравственных норм.

В качестве характеристики риска инфицирования ВИЧ/СПИД в регионе удобно рассматривать величину силы инфекции данного заболевания — λ. Сила инфекции λ равна скорости инфицирования чувствительного индивида [1]. Тогда величина $\lambda\Delta t$ равна вероятности инфицирования в течении времени Δt, например, года.

Силу инфекции любого заболевания нетрудно оценить в первом приближении по данным о заболеваемости и распространенности соответствующей инфекции:

$$\lambda = \frac{I(t)}{S(t)} \tag{1}$$

где I — число индивидов, инфицированных за период времени $(t-1;t)$, S — число чувствительных индивидов на начало периода.

В данной работе, мы предприняли попытку построить показатель, позволяющий оценивать ожидаемый уровень заболеваемости ВИЧ в регионах России на основе информации о процессах социальной дезадаптации населения — индекс риска инфицирования ВИЧ.

Для построения индекса мы использовали метод, описанный в работе [2]. В качестве количественных характеристик факторов социальной дезадаптации, мы выбрали скорости распространения наркомании — λ_D, инфекций, передающихся половым путём (ИППП) — λ_S и алкоголизма — λ_A. Значения этих величин, могут быть оценены на основе статистических данных.

Исходя из анализа эмпирических данных и теоретических знаний о механизмах распространения вируса, был предложен ряд гипотез о виде предполагаемой зависимости силы инфекции ВИЧ от факторов социальной дезадаптации. Проверка этих предположений статистическими методами показала, что следующее выражение наиболее точно приближает имеющиеся данные::

$$\lambda^{(1)} = 1,62\frac{\lambda_S\lambda_D}{\lambda_A}, \tag{2}$$

Формула (2) характеризуется существенной недооценкой силы инфекции в ряде ключевых регионов России. Для повышения качества оценки были использованы сведения о миграционной, экономической и трудовой активности населения, которые также влияют на формирование групп риска. В результате была получена поправка $\lambda^{(2)}$ к формуле (2). Индекс риска инфицирования ВИЧ может быть рассчитан в виде линейной комбинации $\lambda^{(1)}$ и $\lambda^{(2)}$:

$$\lambda = 0,84\lambda^{(1)} + 0,16\lambda^{(2)} \tag{3}$$

Корреляция значений силы инфекции, рассчитанных по формуле (1), и индекса (3) увеличилась по сравнению с (2) (с 0.61 до 0.74) однако это не решает проблемы адекватной оценки риска инфицирования в ряде регионов. Кроме того, такой способ оценки риска инфицирования требует привлечения данных из сфер деятельности, не связанных со здравоохранением.

Анализ зависимостей силы инфекции ВИЧ от факторов социальной дезадаптации указывает на существование некоторых структурных особенностей в распространении вируса в регионах с различными количественными комбинациями указанных факторов. Так, зависимость силы ВИЧ-инфекции от скорости распространения наркомании монотонно возрастающая, от других характеристик — немонотонная. Проанализировав подобные эффекты, мы выделили четыре класса регионов и построили индекс риска инфицирования ВИЧ для каждого класса.

Такой способ оценки силы инфекции ВИЧ в регионах ставит задачу отнесения региона к тому или иному классу. Мы проанализировали регионы в каждом из четырех классов и выделили ряд свойств, которые позволили бы решить указанную проблему классификации субъектов РФ.

Построенный индекс, несмотря на ряд преимуществ, не предназначен для долгосрочного прогнозирования. Он лишь позволяет оценить ожидаемую заболеваемость ВИЧ и дать обоснование основных причин ожидаемого количества вновь инфицированных и направить усилия по борьбе в нужном направлении.

Литература

[1] R. Anderson, R.M. May, *Infectious Diseases of Humans*, Oxford University Press, Oxford, 1991.

[2] Г.И. Марчук, Н.И. Нисевич , И.И. Зубикова, *Биохимический индекс и оценка функционального состояния печени при вирусном гепатите у детей с применением математических методов. Применение математических методов в клинической практике*, Новосибирск: 1970.

Екатерина Александровна Носова,
ФГУ ЦНИИОИЗ, Москва, Россия,
e-mail: `nosova@mednet.ru`

Вычислительные технологии индивидуально–ориентированного моделирования сообществ взаимодействующих индивидуумов

Николай Викторович Перцев[2]

Одним из направлений математического моделирования является исследование трудно формализуемых объектов, к которым относятся разнообразные сообщества взаимодействующих индивидуумов. В ряде фундаментальных исследований и различных прикладных задачах рассматриваются сообщества с достаточно сложной структурой, которая обусловлена параметрами, характеризующими каждого отдельно взятого индивидуума. Взаимодействие индивидуумов и изменения их параметров могут существенно влиять на структуру сообщества (численность, возрастной состав, классификация по заданным признакам и пр.). В связи с этим, построение математических моделей таких сообществ должно опираться на достаточно сложное и гибкое параметрическое описание индивидуумов.

В настоящее время большинство математических моделей биологических и социальных сообществ опирается на детерминированный подход и аппарат дифференциальных, разностных и интегральных уравнений (см., например, П.В. Фурсова, А.П. Левич, 2002 г., обзор). Необходимость развития моделей такого класса с точки зрения многопараметрического описания индивидуумов отмечалась в монографии Р.А. Полуэктова, Ю.А. Пыха, И.А. Швытова (1980 г.). Конструктивный подход к параметрическому описанию индивидуумов в форме систем разностных уравнений предложен в работах А.И. Михальского, А.М. Петровского, А.И. Яшина (1982, 1989 г.г.). Один из самых плодотворных, но достаточно трудных подходов к описанию неоднородных популяций связан с применением уравнений в частных производных и интегро–дифференциальных уравнений (см., например, Г.А. Бочаров, K.P. Hadeler, 2000 г., обзор). Учёт влияния окружающей среды на изменение параметров, входящих в описание процессов рождения, гибели и миграции индивидуумов, представлен в работах В.Г. Ильичева (2001–2009 г.г.). Все модели указанного типа требуют значительных усилий с точки зрения исследования свойств решений соответствующих уравнений как с помощью аналитических, так и численных методов. В частности, серьёзную

---

[2]Работа поддержана РФФИ (проект N 09–01–0098–а) и СО РАН (проект N 26)

проблему представляет собой численное решение дифференциальных уравнений с последействием при переменном шаге интегрирования. Сюда же относится проблема численного решения нелинейных интегральных уравнений типа свёртки с негладкими или разрывными функциями, описывающими дожитие и репродукцию индивидуумов.

Необходимо отметить, что детерминированный подход к построению моделей сообществ индивидуумов имеет некоторые ограничения. Следует учитывать, что численность сообществ может составлять несколько десятков, сотен или тысяч индивидуумов, что приводит к определённым проблемам при интерпретации решений детерминированных моделей и требует привлечения целочисленных переменных. Детерминированный подход не позволяет объяснить многообразие реальных данных, имеющиеся различия между сообществами, достаточно близкими между собой по своей структуре и параметрам индивидуумов. Этот подход не даёт возможности построения и анализа моделей достаточно сложных сообществ в силу громоздкости и нелинейности возникающих систем уравнений. Другое направление в исследовании эволюционирующих сообществ связано с мульти–агентным моделированием, основанном на алгоритмическом описании и программном задании правил поведения индивидуумов (см., например, R. Axtell, 2000 г., K. Carley, et.al, 2003 г., D.M. Green, et.al., 2006 г., H. Rahmandad, et.al, 2006 г., R.E. Watkins, et.al, 2007 г., В.Д. Перминов, Д.А. Саранча и др., 2003 г., 2009 г.). Этот подход позволяет строить довольно гибкие имитационные модели для изучения конкретных сообществ, но не обеспечивает применения аналитических методов, необходимых для построения оценок на переменные моделей. Один из наиболее адекватных и конструктивных способов формализации и изучения сообществ с учётом взаимодействия индивидуумов и изменения их параметров состоит в применении вероятностных моделей и метода статистического моделирования (Монте–Карло). В приложениях широко используются общие ветвящиеся случайные процессы (Б.А. Севастьянов, 1971 г., P. Jagers, 1975 г. и др.), ветвящиеся процессы с взаимодействием частиц (Б.А. Севастьянов, А.В. Калинкин, 1982 г., А.В. Калинкин, 2002 г.), ветвящиеся процессы в переменной и случайной среде (В.А. Ватутин и др., 2005–2008 г.г.) и процессы других типов. Метод статистического моделирования опирается на стандартные алгоритмы генерации случайных величин с заданными законами распределения, а также величин, описывающих свободный пробег нейтрона в неоднородной среде (И.М. Соболь, 1973 г., С.М. Ермаков, Г.А. Михайлов, 1976 г.).

Следует отметить, что для многих сообществ взаимодействие индивидуумов зависит от конкретных значений их параметров (включая возраст), распределения времени жизни индивидуумов отличаются от экспоненциального, первоначально существующие индивидуумы имеют достаточно сложные распределения по возрасту и по значениям своих параметров. Перечисленные особенности указывают на перспективность развития численных методов моделирования и разработки моделирующих программ на основе стохастической индивидуум–ориентированной модели. Примером разработки и применения такой модели являются язык описания сообществ взаимодействующих индивидуумов и программа “Populations Modeler”, разработанные Б.Ю. Пичугиным и Н.В. Перцевым (2004–2009 г.г.). С.А. Клоков и Б.Ю. Пичугин использовали индивидуально–ориентированный подход при разработке алгоритма моделирования и моделирующей программы, предназначенных для расчёта генетической эволюции популяции с двумя генами (2007 г.). Применение этой программы значительно дополнило результаты аналитических исследований модели (P. Haccou, et.al., 2006–2007 г.г.).

Работа по созданию стохастических индивидуально–ориентированных моделей, предназначенных для исследования широкого класса сообществ взаимодействующих индивидуумов, должна включать в себя решение следующих задач:

1) построение теоретико–вероятностного описания сообществ с произвольными распределениями характеристик индивидуумов, влияющих на процессы их рождения, гибели и взаимодействия,

2) разработка высокоэффективных вычислительных алгоритмов и структур данных, позволяющих моделировать сообщества численностью до нескольких миллионов индивидуумов, в том числе, с учётом возможности проведения параллельных вычислений,

3) создание моделирующих программ на основе разработанных алгоритмов в разных средах программирования, включая программы для вычислительных кластеров и супер–ЭВМ.

Николай Викторович Перцев,
Омский филиал Института математики СО РАН, Омск, Россия,
e-mail: homlab@ya.ru

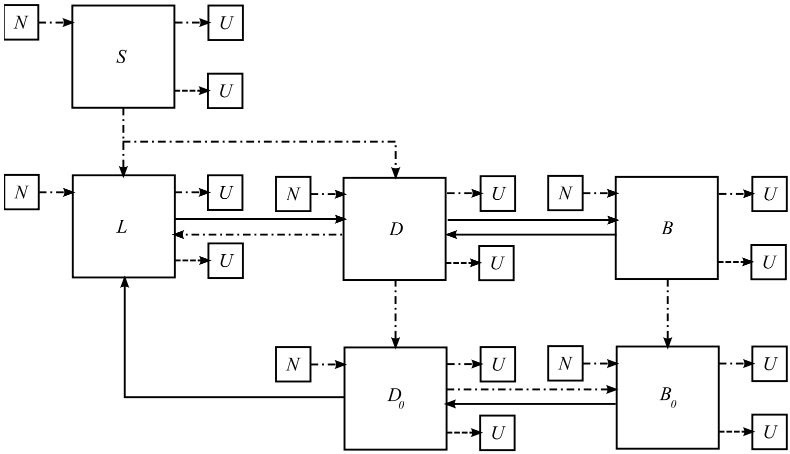
Индивидуум-ориентированная модель распространения туберкулеза

Борис Юрьевич Пичугин[1]

Туберкулез — это очень распространенное заболевание, передающееся в основном воздушно-капельным путем. Во многих странах (в том числе и в России) оно имеет характер эпидемии. Туберкулез (или холера) известен человечеству уже несколько тысяч лет, но возбудитель был выявлен лишь в 1882 году Р. Кохом, а эффективные лекарства получены в 80-х годах XX века. Но и это не позволило справится с болезнью так как микобактерии туберкулеза очень быстро приспосабливаются и приобретают резистентность к различным видам лечения. Распространению заболевания также способствуют и социальные факторы: низкий уровень жизни у некоторых слоев населения, безответственное отношение к профилактике и лечению. Поэтому исследование туберкулеза является одним из приоритетных направлений.

В данной работе построена индивидуум-ориентированная вероятностная модель распространения туберкулеза органов дыхания (ТБОД) в некотором регионе. В основу модели положен подход, использованный в [1]. Согласно этому подходу все индивидуумы старше 16 лет, проживающие в исследуемом регионе, поделены на 6 когорт: S, L, D, B, D_0, B_0, где S — когорта восприимчивых вакцинированных индивидуумов, L — когорта индивидуумов, несущих латентную инфекцию, но не развивших активных форм болезни, D — когорта невыявленных больных в активной стадии ТБОД, но не выделяющих микобактерии туберкулеза, B — когорта невыявленных больных в активной стадии ТБОД, выделяющих микобактерии туберкулеза, D_0 — когорта больных в активной стадии ТБОД, не выделяющих микобактерии и находящихся на учёте системы противотуберкулезных диспансеров, B_0 — когорта больных в активной стадии ТБОД, выделяющих микобактерии и находящихся на учёте системы противотуберкулезных диспансеров. На рисунке изображена схема переходов индивидуумов между когортами.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты №№ 06–01–00127, 09-01-00098-А).



Здесь N — это множество новых индивидуумов, а U — множество погибших или покинувших регион индивидуумов. Стрелками показаны потоки индивидуумов. Сплошными стрелками показаны переходы, обусловленные окончанием случайного времени пребывания в когорте. Распределения времени пребывания в когортах являются параметрами модели. Пунктирными стрелками показана гибель индивидуумов в результате старения. Распределение времени жизни индивидуумов также является параметром модели. Штрих-пунктирными стрелками показаны переходы, описываемые пуассоновскими потоками различной интенсивности, зависящей от численностей когорт.

Построенная модель была исследована численно при помощи программы Populations Modeller [2–3]. Целью вычислительных экспериментов являлось изучение распределения заболевших индивидуумов в зависимости он профилактических мероприятий (в частности, от регулярности проведения флюорографического обследования).

Литература

[1] M.I. Perelman, G.I. Marchuk, S.E. Borisov, et. al., *Tuberculosis epidemiology in Russia: the mathematical model and data analysis*, Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling, **19** (4), 2004, 305—314.

[2] Б.Ю. Пичугин, *Стохастическая модель сообщества взаимодействующих особей, охарактеризованных набором параметров*, Труды международной конференции по вычислительной математике МКВМ-2004. Ч.1., Новосибирск: Изд. ИВМиМГ СО РАН, 2004, 303–309.

[3] `http:// iitam.omsk.net.ru/~pichugin/`

Борис Юрьевич Пичугин,
Омский филиал Института математики СО РАН, Омск, Россия,
e-mail: bpichugin@mail.ru

Автоматизация построения иерархий в измерениях многомерных моделей данных

Павел Григорьевич Редреев

Для представления данных в системах оперативного анализа данных OLAP (online analytical processing) [1] используются многомерные модели данных, называемые гиперкубами. В докладе рассматривается способ автоматизированного определения иерархий [2] в измерениях гиперкуба, сформированного из исходной реляционной базы данных.

Модель данных «композиционная таблица» является обобщением модели «семантическая трансформация» [3] на случай списка значений в одной ячейке. Представление «композиционной таблицы» — отношение R^*, строится из исходного реляционного отношения R. Схема описания отношения R^*: $Sch(R^*) = \{X, \bigcup_{i=1}^{N} Dom(Y_i) \times \{Z_i\}\}$, где X, Y_i, Z_i — множества атрибутов из R. X и Y_i $(i = 1, 2, \dots, N)$ являются обобщенными координатами и могут рассматриваться как измерения.

При построении иерархии в измерении в качестве уровней измерения используются атрибуты исходной базы данных. Схема иерархии — это ориентированный ациклический и слабо связный граф $H = (A, E)$, где A — множество атрибутов, E — множество дуг. C, D — атрибуты. $C \prec D$, если в H существует путь из вершины C в D.

Для задания частичного порядка на множестве атрибутов, входящих в функциональные и многозначные зависимости [4], используется эвристическое правило:
Атрибуты из множества атрибутов, принимающего меньшее количество значений, располагаются в иерархии выше чем атрибуты из множества, принимающего большее количество значений.

Для функциональной зависимости $C \to D$, где C и D — множества атрибутов, для атрибутов $C_k \in C, D_l \in D$ $\forall k, l$ $C_k \prec D_l$. Для многозначной зависимости $C \twoheadrightarrow D(E)$, где C, D, E — множества атрибутов, для атрибутов $C_k \in C, I_l \in D \cup E$ $\forall k, l$ $I_l \prec C_k$.

L — множество атрибутов X или Y_j «композиционной таблицы». Разработанный алгоритм построения схемы иерархии H из атрибутов L использует частичный порядок, заданный на множестве атрибутов.

Если иерархия является нерегулярной [1], то производится её нормализация.

Применение предложенного алгоритма формирования иерархий в OLAP-системах позволит сократить время на формирование схемы новой многомерной модели данных.

Литература

[1] Т.Б. Педерсен, К.С. Йенсен, *Технология многомерных баз данных*, Открытые системы, **1**, 2002, 45–50.

[2] E. Malinowski, E. Zimanyi, *OLAP hierarchies: A conceptual perspective*, In Proc. of the 16th Int. Conf. on Advanced Information Systems Engineering, 2004, 477–491.

[3] С.В. Зыкин, *Формирование гиперкубического представления реляционной базы данных*, Программирование, **6**, 2006, 348–354.

[4] Дж. Ульман, *Основы систем баз данных*, М.: ФиС, 1983, 334 с.

Павел Григорьевич Редреев,
Омский филиал Института математики СО РАН, Омск, Россия,
e-mail: redreev@mail.ru

Свойства коммутанта и универсальная эквивалентность частично коммутативных метабелевых групп.

Евгений Иосифович Тимошенко

Пусть Γ конечный простой граф на множестве вершин $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Частично коммутативная метабелева группа S_Γ задана представлением

$$S_\Gamma =< x_1, \ldots, x_n | [x_i, x_j] = 1 \Leftrightarrow (x_i, x_j) \in \Gamma >$$

в многообразии метабелевых групп.

В докладе для частично коммутативных метабелевых групп:

— найдены необходимые и достаточные условия для универсальной эквивалентности в том случае, когда определяющие графы являются деревьями;

— полностью описаны аннуляторы элементов из коммутанта и доказан ряд интересных свойств коммутанта как модуля над кольцом многочленов Лорана;

— получена каноническую запись элементов группы;

— доказана аппроксимируемость нильпотентными группами без кручения;

— изучены централизаторы элементов;

— показано, что две частично коммутативные метабелевы группы имеют одинаковые элементарные теории тогда и только тогда, когда определяющие их графы изоморфны;

— доказываем, что такую группу можно вложить в метабелеву группу с разрешимой универсальной теорией.

Евгений Иосифович Тимошенко,
Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет, Новосибирск, Россия,
e-mail: etim@sibstrin.ru

Автоморфизмы частично коммутативных нильпотентных R-групп

Александр Викторович Трейер

Пусть R — либо поле нулевой характеристики, либо кольцо целых чисел. Пусть Γ — конечный простой (без кратных рёбер и петель) граф с множеством вершин $\{x_1, \ldots, x_n\}$ и множеством рёбер E. По графу Γ в многообразии двуступенно нильпотентных R-групп строится частично коммутативная группа: $G_\Gamma = \langle x_1, \ldots, x_n | [x_i, x_j] = 1, (x_i, x_j) \in E \rangle_{N_{2,R}}$.

В докладе будет описана структура группы автоморфизмов группы G_Γ. Кроме того, для графа Γ построена R-арифметическая линейная группа $H(\Gamma)$. Группа $H(\Gamma)$ реализована как группа факторных автоморфизмов частично коммутативной двуступенно нильпотентной R-группы G_Γ.

Александр Викторович Трейер,
Омский филиал Института математики СО РАН, Омск, Россия,
e-mail: `alexander.treyer@gmail.com`

Анализ устойчивости положений равновесия моделей динамики популяций, подверженных воздействию вредных веществ

Галина Евгеньевна Царегородцева

Рассматриваются математические модели динамики популяций, особи которых подвержены воздействию вредных веществ, поступающих в составе ресурсов питания. Предполагается, что продукт взаимодействия вредных веществ оказывает негативное влияние на продолжительность жизни особей популяции или на скорость их репродукции. Система уравнений первой модели имеет вид

$$\begin{gathered} \dot{c}_i = r_i - \theta_i(c_i)\,x - \delta_i\,c_i, \quad 1 \le i \le k, \\ \dot{x} = \beta\,x - \gamma x^2 - \theta(c_1,\ldots,c_k)\,x, \quad t > 0, \\ c_j(0) = c_j^{(0)} \ge 0,\ 1 \le j \le k, \ \ x(0) = x^{(0)} \ge 0. \end{gathered} \tag{1}$$

Вторая модель записывается в форме

$$\begin{gathered} \dot{c}_i = r_i - \theta_i(c_i)\,x - \delta_i\,c_i, \quad 1 \le i \le k, \\ \dot{x} = \beta\,g(\varphi(c_1,\ldots,c_k))\,x - \lambda\,x - \gamma x^2, \quad t > 0, \\ c_j(0) = c_j^{(0)} \ge 0,\ 1 \le j \le k, \ \ x(0) = x^{(0)} \ge 0. \end{gathered} \tag{2}$$

В уравнениях (1), (2) приняты следующие обозначения. Переменная $c_i = c_i(t)$ означает количество вредных веществ i-го типа, $x = x(t)$ — численность популяции в момент времени t, функция $\theta_i(c_i)$ задаёт скорость потребления одной особью вредных веществ i–го типа, входящих в состав пищевых ресурсов, $1 \le i \le k$. Функция $\theta(c_1,\ldots,c_k)$ описывает скорость образования продукта взаимодействия вредных веществ, который приводит к повышению интенсивности смертности особей популяции. Функция $g(u(t))$ учитывает снижение репродуктивного потенциала особей за счёт влияния продукта взаимодействия вредных веществ, величина которого задаётся функцией $u(t) = \varphi(c_1(t),\ldots,c_k(t))$. Параметр $\beta > 0$ — максимальная скорость репродукции одной особи без учёта влияния вредных веществ, $\gamma > 0$ — константа, отражающая интенсивность взаимодействия особей, коэффициент $\lambda > 0$ — интенсивность процессов миграции и естественной смертности особей популяции. Константы $r_i > 0$, $\delta_i > 0$ задают соответственно скорости поступления и распада вредных веществ.

В работе исследованы вопросы существования, единственности и неотрицательности решений моделей на промежутке $t \in [0, \infty)$. Рассмотрены вопросы существования и устойчивости положений равновесия. Получены условия вырождения популяции и условия, обеспечивающие поддержание ее численности на ненулевых стационарных уровнях. Приведены результаты вычислительных экспериментов.

Результаты исследования указывают на достаточно сложную динамику популяций, развивающихся в условиях постоянного воздействия вредных веществ. Эффект воздействия этих веществ проявляется в существовании нескольких устойчивых стационарных режимов динамики популяции, одним из которых может являться режим, связанный с вырождением популяции.

На основе уравнений (1), (2) могут быть построены стохастические модели в форме неоднородного нелинейного случайного процесса рождения и гибели.

Работа поддержана СО РАН (интеграционный проект N 26).

Галина Евгеньевна Царегородцева,
Омский филиал Института математики СО РАН, Омск, Россия,
e-mail: `GalinaTsar@ya.ru`

Компьютерная реализация криптосистемы Мак-Элиса,

Владимир Викторович Федосов

Были поставлены следующие задачи:

1. Программно реализовать криптосистему Мак-Элиса на основе БЧХ-кодов и кодов Рида-Маллера.

2. Создать программу демонстрации криптосистемы для обработки текстовой информации.

Описание криптосистемы Мак-Элиса: Абонент «А» шифрует секретное сообщение I открытым ключом $\overline{B}$ и передаёт его по каналу связи, где оно искажается, абоненту «В». Матрица $\overline{B} = L \cdot B \cdot P$, где L — невырожденная матрица, а P — перестановочная. В результате абонент «В» получает вектор $V = I \cdot \overline{B} + e$ (e — вектор ошибок).

Абонент «В», получив V, находит $\overline{V} = V \cdot P^{-1}$. Затем с помощью какого-либо общеизвестного алгоритма декодирования для кодов исправляющих ошибки он находит вектор $\overline{I} = I \cdot L$, после чего вычисляет уже само секретное сообщение $I = \overline{I} \cdot L^{-1}$.

В результате проделанной работы были реализованы:

1. Криптосистема Мак-Элиса, на основе БЧХ-кодов и кодов Рида-Маллера.

2. Программа демонстрации криптосистемы, обрабатывающая текстовую информацию.

Владимир Викторович Федосов,
Омский государственный университет, Омск, Россия,
e-mail: `fedvov@mail.ru`

List of Authors

Список авторов