

Commutative idempotent semigroups in the universal algebraic geometry (Коммутативные полугруппы в универсальной алгебраической геометрии)

Artem Shevlyakov

Omsk Branch of Institute of Mathematics

18th August, 2009

The first big theorem

Theorem. Let \mathcal{A} be an equationally Noetherian algebra of the language \mathcal{L} and C be a finitely generated algebra of the same language. Then the following conditions are equivalent. эквивалентны:

- 1) $Th_{\forall}(\mathcal{A}) \subseteq Th_{\forall}(C)$, i.e. $C \in \text{ucl}(\mathcal{A})$;
- 2) $Th_{\exists}(\mathcal{A}) \supseteq Th_{\exists}(C)$;
- 3) C is embedded into an ultrapower of \mathcal{A} ;
- 4) C is discriminated by \mathcal{A} ;
- 5) C is a limit algebra over \mathcal{A} ;
- 6) C is determined by a complete atomic type of the theory $Th_{\forall}(\mathcal{A})$ of the language \mathcal{L} ;
- 7) C is a coordinate algebra of nonempty irreducible algebraic set over \mathcal{A} and this set is described by a system of equations over \mathcal{L} .

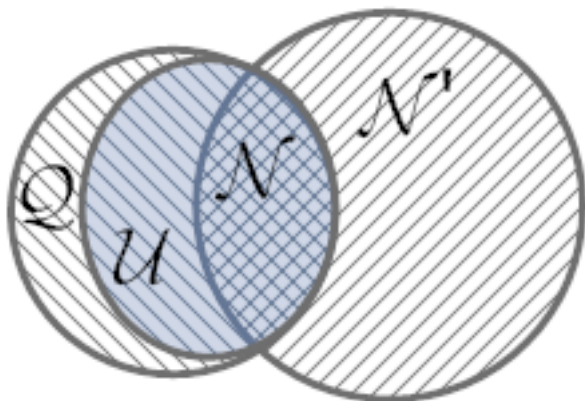
Each algebra which satisfies this theorem is called u_{ω} -compact. Further we give the equivalent definition of u_{ω} -compact algebra.

... and the second one

Theorem. Let \mathcal{A} be an equationally Noetherian algebra of the language \mathcal{L} and C be a finitely generated algebra of the same language. Then the following conditions are equivalent.

- 1) $C \in \text{qvar}(\mathcal{A})$, i.e. $\text{Th}_{\text{qi}}(\mathcal{A}) \subseteq \text{Th}_{\text{qi}}(C)$;
- 2) $C \in \text{pvar}(\mathcal{A})$;
- 3) C is embedded into direct product of algebra \mathcal{A} ;
- 4) C is separated by \mathcal{A} ;
- 5) C is subdirectly embedded into direct sum of limit algebras over \mathcal{A} ;
- 6) C is determined by a complete atomic type of the theory $\text{Th}_{\text{qi}}(\mathcal{A})$ of the language \mathcal{L} ;
- 7) C is a coordinate algebra of nonempty algebraic set over \mathcal{A} and this set is described by a system of equations over \mathcal{L} .

Each algebra which satisfies this theorem is called q_ω -compact. Further we give the equivalent definition of q_ω -compact algebra.



The problems formulated by VNR (a history)

- VNR: Try to distinguish classes of q_{ω}, u_{ω} -compact and equationally Noetherian algebras. (The solution is due to M. Kotov).

The problems formulated by VNR (a history)

- VNR: Try to distinguish classes of q_{ω}, u_{ω} -compact and equationally Noetherian algebras. (The solution is due to M. Kotov).
- VNR (at the next day): Try to distinguish classes of q_{ω}, u_{ω} -compact and equationally Noetherian over standard algebraic systems (groups, semigroups...)

Commutative idempotent semigroups

Semigroup is a set with binary associative operations. A semigroup is called *commutative (idempotent)* if $\forall x \forall y \ xy = yx$ ($\forall x \ xx = x$). One can define the partial order over an idempotent semigroup

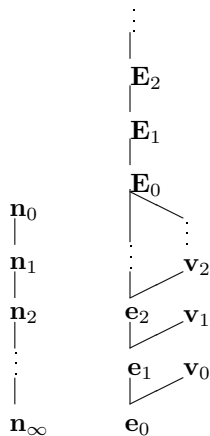
$$x \leq y \Leftrightarrow xy = x.$$

Полугруппой называется алгебраическая система с ассоциативной бинарной операцией. Полугруппа *коммутативна*, если для любой пары её элементов x, y выполнено соотношение $xy = yx$. Полугруппа называется *идемпотентной*, если для её любого элемента x справедливо равенство $xx = x$.

На элементах идемпотентной полугруппы определён частичный порядок

$$x \leq y \Leftrightarrow xy = x.$$

The Lattices of the elements of idempotent semigroups (решётки элементов идемпотентных полугрупп)



The definitions of semigroups (определение полугрупп)

$$\mathcal{A}_1 = \langle \{\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \dots, \mathbf{n}_\infty\}; \cdot; \mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \dots, \mathbf{n}_\infty \rangle,$$

$$\mathcal{A}_2 = \langle \{\mathbf{e}_i\} \cup \{\mathbf{E}_i\}; \cdot; \{\mathbf{e}_i\} \rangle,$$

$$\mathcal{A}_3 = \langle \{\mathbf{e}_i\} \cup \{\mathbf{v}_i\} \cup \{\mathbf{E}_i\}; \cdot; \{\mathbf{e}_i\} \rangle.$$

The representations of the semigroups \mathcal{A}_i (представления полугрупп \mathcal{A}_i)

The semigroups \mathcal{A}_i are embedded into direct product of the semigroup $\mathbb{F} = \langle \{0, 1\}; \cdot; 0, 1 \rangle$ (полугруппы \mathcal{A}_i вкладываются в декартову степень полугруппы $\mathbb{F} = \langle \{0, 1\}; \cdot; 0, 1 \rangle$)

$$\mathbf{e}_i = \begin{pmatrix} \underbrace{11 \dots 1}_{i \text{ times}} 00 \dots \\ 00 \dots 000 \dots \\ 00 \dots 000 \dots \end{pmatrix} \quad (i \geq 0)$$

$$\mathbf{v}_i = \begin{pmatrix} \underbrace{11 \dots 1}_{i \text{ times}} 00 \dots \\ 00 \dots 100 \dots \\ 00 \dots 000 \dots \end{pmatrix} \quad (i \geq 0)$$

$$\mathbf{E}_i = \begin{pmatrix} 11 \dots 111 \dots \\ 11 \dots 111 \dots \\ \underbrace{11 \dots 1}_{i \text{ times}} 00 \dots \end{pmatrix} \quad (i \geq 0)$$

Terms (термы)

Each term $t(\bar{X})$ over semigroups \mathcal{A}_i can be written in the equivalent form

$$t(X) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \mathbf{c},$$

where $\alpha_i \in \{0, 1\}$ and \mathbf{c} is a constant of the algebraic system \mathcal{A}_i . A term which does not contain constants is called *coefficient-free*. A coefficient-free term with $\alpha_i = 0$ for all i is called *empty*.

Каждый терм $t(\bar{X})$ над полугруппой \mathcal{A}_i эквивалентен терму вида

$$t(X) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \mathbf{c},$$

где $\alpha_i \in \{0, 1\}$, \mathbf{c} константа алгебраической системы \mathcal{A}_i .

Терм, в запись которого не входит константа, будем называть *бескоэффициентным*. Бескоэффициентный терм, для которого все числа α_i равны нулю будем называть *пустым*.

Equations (уравнения)

An equation over the semigroup \mathcal{A}_i is an atomic formula $t(X)\mathbf{c} = s(X)\mathbf{c}'$, где $t(X), s(X)$ — coefficient-free terms. Remind that the terms $t(X), s(X)$ can be empty, and the constants can be omitted in one or both parts of equation.

The system of equations is an arbitrary set of equations. The solution of a system \mathcal{S} over \mathcal{A}_i is denoted as $V_{\mathcal{A}_i}(\mathcal{S})$.

Two systems are called *equivalent over \mathcal{A}_i* if they have the same solution.

Уравнением над полугруппой \mathcal{A}_i будем называть атомарную формулу $t(X)\mathbf{c} = s(X)\mathbf{c}'$, где $t(X), s(X)$ — бескоэффициентные термы, \mathbf{c}, \mathbf{c}' — константы алгебраической системы \mathcal{A}_i . Заметим, что термы $t(X), s(X)$ могут быть пустыми, а константы могут отсутствовать в одной или обеих частях уравнения. Системой уравнений будем называть произвольное множество уравнений. Решение системы уравнений \mathcal{S} над полугруппой \mathcal{A}_i будем обозначать через $V_{\mathcal{A}_i}(\mathcal{S})$. Системы уравнений будем называть *эквивалентными над полугруппой \mathcal{A}_i* , если множества их решений над этой полугруппой совпадают.

Noetherian property (нётеровость по уравнениям)

A semigroup \mathcal{A} is called *equationally Noetherian* if for each system \mathcal{S} depending on the variables $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ there exists a finite subsystem equivalent to \mathcal{S} .

Полугруппа \mathcal{A} называется *нётеровой по уравнениям*, если для любой системы уравнений \mathcal{S} (в том числе и несовместной) от переменных $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ существует конечная подсистема, эквивалентная \mathcal{S} .

...and its generalizations (... и её обобщения)

The semigroup \mathcal{A} is called *weakly Noetherian* if for each systems \mathcal{S} depending on variables $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ there exists a finite systems \mathcal{S}_0 which is equivalent to \mathcal{S} (here we do not assume \mathcal{S}_0 to be a subsystem of \mathcal{S}).

Полугруппа \mathcal{A} называется *слабо нётеровой по уравнениям*, если для любой системы уравнений \mathcal{S} от переменных $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ существует конечная система (не обязательно содержащаяся в \mathcal{S}), эквивалентная \mathcal{S} .

...and its generalizations (... и её обобщения)

The semigroup \mathcal{A} is called q_ω -compact if for each systems \mathcal{S} depending on variables $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ and for an equation $t(X) = s(X)$ such that $V_{\mathcal{A}}(\mathcal{S}) \subseteq V_{\mathcal{A}}(t(X) = s(X))$ there exists a finite systems \mathcal{S}_0 with $V_{\mathcal{A}}(\mathcal{S}_0) \subseteq V_{\mathcal{A}}(t(X) = s(X))$.

Полугруппа \mathcal{A} называется q_ω -компактной, если для любой системы уравнений \mathcal{S} от переменных $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ и любого уравнения $t(X) = s(X)$ такого, что $V_{\mathcal{A}}(\mathcal{S}) \subseteq V_{\mathcal{A}}(t(X) = s(X))$ существует конечная подсистема \mathcal{S}_0 такая, что $V_{\mathcal{A}}(\mathcal{S}_0) \subseteq V_{\mathcal{A}}(t(X) = s(X))$.

...and its generalizations (... и её обобщения)

The semigroup \mathcal{A} is called u_ω -compact if for each systems \mathcal{S} depending on variables $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ and for equations $t_1(X) = s_1(X), \dots, t_m(X) = s_m(X)$ such that

$$V_{\mathcal{A}}(\mathcal{S}) \subseteq \cup_{i=1}^m V_{\mathcal{A}}(t_i(X) = s_i(X)),$$

there exists a finite systems \mathcal{S}_0 with

$$V_{\mathcal{A}}(\mathcal{S}_0) \subseteq \cup_{i=1}^m V_{\mathcal{A}}(t_i(X) = s_i(X)).$$

Полугруппа \mathcal{A} называется u_ω -компактной, если для любой системы уравнений \mathcal{S} от переменных $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ и любого конечного набора уравнений $t_i(X) = s_i(X)$ ($1 \leq i \leq m$) таких, что

$$V_{\mathcal{A}}(\mathcal{S}) \subseteq \cup_{i=1}^m V_{\mathcal{A}}(t_i(X) = s_i(X)),$$

существует конечная подсистема \mathcal{S}_0 такая, что

$$V_{\mathcal{A}}(\mathcal{S}_0) \subseteq \cup_{i=1}^m V_{\mathcal{A}}(t_i(X) = s_i(X)).$$

The comparison with abelian groups (сравнение с абелевыми группами)

Theorem. All abelian groups over the language $\mathcal{L} = \langle +, -; 0, \mathcal{C} \rangle$ are equationally Noetherian (\mathcal{C} is an arbitrary set of constants).

Теорема. Все абелевы группы являются нётеровыми по уравнениям в языке $\mathcal{L} = \langle +, -; \mathcal{C} \rangle$, где \mathcal{C} — произвольное множество констант.

Equationally Noetherian commutative idempotent semigroups (нётеровые по уравнениям коммутативные идемпотентные полугруппы)

Theorem. Let the set S be a commutative idempotent semigroup. Then the algebraic system $\mathcal{A} = \langle S; \cdot \rangle$ is equationally Noetherian.

Теорема. Пусть множество S образует коммутативную идемпотентную полугруппу относительно операции \cdot . Тогда алгебраическая система $\mathcal{A} = \langle S; \cdot \rangle$ является нётеровой по уравнениям.

Quasi-Equationally Noetherian commutative idempotent semigroups (нётеровые по уравнениям коммутативные идемпотентные полугруппы)

Recall that for equationally Noetherian semigroup all systems (including unsolvable) must have an equivalent finite systems. The definition: "A semigroup is equationally Noetherian if each solvable system has equivalent finite subsystem" is not equivalent to the first one. Since it is easy to construct a commutative semigroup \mathcal{A}_0 such that

- 1) there exist an unsolvable system \mathcal{S} over \mathcal{A}_0 such that all finite subsystems of \mathcal{S} have a solution;
- 2) all solvable systems over \mathcal{A}_0 are equivalent to their finite subsystems.

Для нётеровой по уравнениям полугруппы все, в том числе и несовместные системы уравнений эквивалентны своей конечной подсистеме. Определение: "Полугруппа нётерова по уравнениям, если каждая совместная система над ней имеет эквивалентную конечную подсистему" не эквивалентно исходному.

Ordered systems (упорядоченные системы)

An INFINITE system $\{t(X)\mathbf{a}_k = s(X)\mathbf{b}_k | k \in K\}$ is called *ordered* if coefficient-free terms $t(X), s(X)$ (we admit the terms $t(X), s(X)$ to be empty) occur in each equation and moreover the one of the following conditions holds:

- 1 $\mathbf{a}_k < \mathbf{b}_k$ for all equations;
- 2 $\mathbf{a}_k > \mathbf{b}_k$ for all equations;
- 3 $\mathbf{a}_k = \mathbf{b}_k$ for all equations;
- 4 each equation has a view $t(X)\mathbf{a}_k = s(X)$;
- 5 each equation has a view $t(X) = s(X)\mathbf{b}_k$.

It is easy to solve an ordered system $\{t(X)\mathbf{a}_k = s(X)\mathbf{b}_k \mid k \in K\}$.
Introduce new variables $\mathbf{x} = t(X)$, $\mathbf{y} = s(X)$ and solve the system with two variables.

Упорядоченные системы сводятся к системам от двух переменных.

Lemma Let \mathcal{S} be an infinite system over the semigroup \mathcal{A}_i and \mathcal{S} depends on the variables $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Then \mathcal{S} can be decomposed into a finite union of its subsystems

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \dots \cup \mathcal{S}_m \cup \tilde{\mathcal{S}},$$

where \mathcal{S}_i are ordered and $\tilde{\mathcal{S}}$ is finite.

Лемма Пусть \mathcal{S} — бесконечная система уравнений над полугруппой \mathcal{A}_i от переменных $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Тогда \mathcal{S} представима в виде конечного объединения своих подсистем

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \dots \cup \mathcal{S}_m \cup \tilde{\mathcal{S}},$$

где \mathcal{S}_i — упорядоченные, а $\tilde{\mathcal{S}}$ — конечная система.

Semigroup \mathcal{A}_1

Theorem. \mathcal{A}_1 is weakly Noetherian, but not equationally Noetherian.

Теорема. Коммутативная полугруппа \mathcal{A}_1 слаба нётерова, но не является нётеровой по уравнениям.

Hint: $\mathcal{S} = \{x\mathbf{n}_i = x \mid i \in \mathbb{N}\} = \{x \leq \mathbf{n}_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, $V_{\mathcal{A}_1} = \{n_\infty\}$.

Semigroup \mathcal{A}_2

Theorem. \mathcal{A}_2 is u_ω -compact (and obviously q_ω -compact) but it is not equationally Noetherian.

Теорема. Коммутативная полугруппа \mathcal{A}_2 u_ω -компактна (и, следовательно, q_ω -компактна), но не является нётеровой по уравнениям.

Hint: $\mathcal{S} = \{x\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i \mid i \in \mathbb{N}\} = \{x \geq \mathbf{e}_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, $V_{\mathcal{A}_2} = \{x \mid x \geq \mathbf{E}_0\}$.

Semigroup \mathcal{A}_3

Теорема. \mathcal{A}_3 is q_ω -compact, but not u_ω -compact.

Теорема. Коммутативная полугруппа \mathcal{A}_3 q_ω -компактна, но не является u_ω -компактной.

Hint: $\mathcal{S} = \{xe_i = e_i, ye_i = e_i | i \in \mathbb{N}\}$ with
 $V_{\mathcal{A}_3} = \{(x, y) | x \geq \mathbf{E}_0, y \geq \mathbf{E}_0\}$.
 $V_{\mathcal{A}_3}(\mathcal{S}) \subseteq V_{\mathcal{A}_3}(x \leq y) \cup V_{\mathcal{A}_3}(x \geq y)$.

Evelina's will: the definitions of q_ω -compactness

Initial definition. The semigroup \mathcal{A} is called q_ω -compact if for each systems \mathcal{S} depending on variables $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ and for an equation $t(X) = s(X)$ such that $V_{\mathcal{A}}(\mathcal{S}) \subseteq V_{\mathcal{A}}(t(X) = s(X))$ there exists a finite systems \mathcal{S}_0 with $V_{\mathcal{A}}(\mathcal{S}_0) \subseteq V_{\mathcal{A}}(t(X) = s(X))$.

Formula definition. A semigroup is called q_ω -compact if for each formula

$$\forall x_1 \dots \forall x_n \bigwedge_{(t=s) \in \mathcal{S}} t(\bar{x}) = s(\bar{x}) \rightarrow t_0(\bar{x}) = s_0(\bar{x})$$

which is satisfied by semigroup \mathcal{A} there exist a finite subsystem $\mathcal{S}_c \subseteq \mathcal{S}$ such that the formula

$$\forall x_1 \dots \forall x_n \bigwedge_{(t=s) \in \mathcal{S}_c} t(\bar{x}) = s(\bar{x}) \rightarrow t_0(\bar{x}) = s_0(\bar{x})$$

holds at \mathcal{A} .

The q_ω -compactness of the semigroup \mathcal{A} means that for an arbitrary number n , a set S of atomic formulas and an arbitrary atomic formula $(t_0 = s_0)$ of the language \mathcal{L} the set

$$S \cup \{\neg(t_0 = s_0)\}$$

is a compact. In other words, the satisfiability of each finite subset of S at \mathcal{A} implies the satisfiability of the whole set S .

Evelina's will: the definitions of u_ω -compactness

Initial definition. The semigroup \mathcal{A} is called u_ω -compact if for each systems \mathcal{S} depending on variables $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ and for equations $t_1(X) = s_1(X), \dots, t_m(X) = s_m(X)$ such that

$$V_{\mathcal{A}}(\mathcal{S}) \subseteq \bigcup_{i=1}^m V_{\mathcal{A}}(t_i(X) = s_i(X)),$$

there exists a finite systems \mathcal{S}_0 with

$$V_{\mathcal{A}}(\mathcal{S}_0) \subseteq \bigcup_{i=1}^m V_{\mathcal{A}}(t_i(X) = s_i(X)).$$

Formula definition. A semigroup is called q_ω -compact if for each infinite formula

$$\forall x_1 \dots \forall x_n \bigwedge_{(t=s) \in S} t(\bar{x}) = s(\bar{x}) \rightarrow \bigvee_{i=1}^m t_i(\bar{x}) = s_i(\bar{x})$$

which is satisfied by semigroup \mathcal{A} there exist a finite subsystem $S_c \subseteq S$ such that the formula

$$\forall x_1 \dots \forall x_n \bigwedge_{(t=s) \in S_c} t(\bar{x}) = s(\bar{x}) \rightarrow \bigvee_{i=1}^m t_i(\bar{x}) = s_i(\bar{x})$$

The q_ω -compactness of the semigroup \mathcal{A} means that for an arbitrary number n , set S of atomic formulas and an arbitrary atomic formulas $(t_1 = s_1), \dots, (t_m = s_m)$ of the language \mathcal{L} the set

$$S \cup \{\neg(t_1 = s_1), \dots, \neg(t_m = s_m)\}$$

is a compact. In other words, the satisfiability of each finite subset of S at \mathcal{A} implies the satisfiability of the whole set S .

КОНЕЦ (ЗЭ ЭНД).