Commutative idempotent semigroups in the universal algebraic geometry (Коммутативные полугруппы в универсальной алгебраической геометрии)

Artem Shevlyakov

Omsk Branch of Institute of Mathematics

18th August, 2009

The first big theorem

Theorem. Let $\mathcal{A}$ be an equationally Noetherian algebra of the language $\mathcal{L}$ and C be a finitely generated algebra of the same language. Then the following conditions are equivalent. эквивалентны:

1) $Th_\forall(\mathcal{A}) \subseteq Th_\forall(C)$, i.e $C \in \mathrm{ucl}(\mathcal{A})$;
2) $Th_\exists(\mathcal{A}) \supseteq Th_\exists(C)$;
3) C is embedded into an ultrapower of $\mathcal{A}$;
4) C is discriminated by $\mathcal{A}$;
5) C is a limit algebra over $\mathcal{A}$;
6) C is determined by a complete atomic type of the theory $Th_\forall(\mathcal{A})$ of the language $\mathcal{L}$;
7) C is a coordinate algebra of nonempty irreducible algebraic set over $\mathcal{A}$ and this set is described by a system of equations over Ł.

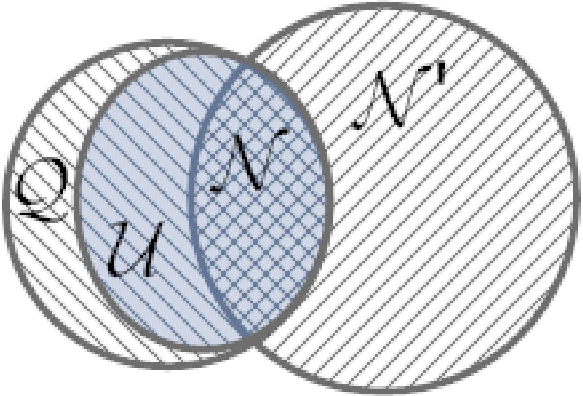
Each algebra which satisfies this theorem is called u_ω-compact. Further we give the equivalent definition of u_ω-compact algebra.

… and the second one

Theorem. Let $\mathcal{A}$ be an equationally Noetherian algebra of the language $\mathcal{L}$ and C be a finitely generated algebra of the same language. Then the following conditions are equivalent.

1) $C \in \mathrm{qvar}(\mathcal{A})$, i.e. $Th_{\mathrm{qi}}(\mathcal{A}) \subseteq Th_{\mathrm{qi}}(C)$;
2) $C \in pvar(\mathcal{A})$;
3) C is embedded into direct product of algebra $\mathcal{A}$;
4) C is separated by $\mathcal{A}$;
5') C is subdirectly embedded into direct sum of limit algebras over $\mathcal{A}$;
6) C is determined by a complete atomic type of the theory $Th_{\mathrm{qi}}(\mathcal{A})$ of the language $\mathcal{L}$;
7) C is a coordinate algebra of nonempty algebraic set over $\mathcal{A}$ and this set is described by a system of equations over $\mathcal{L}$.

Each algebra which satisfies this theorem is called q_ω-compact. Further we give the equivalent definition of q_ω-compact algebra.



$\mathcal{Q}$
$\mathcal{U}$
$\mathcal{N}$
$\mathcal{N}'$

The problems formulated by VNR (a history)

- VNR: Try to distinguish classes of q_ω,u_ω-compact and equationally Noetherian algebras. (The solution is due to M. Kotov).

The problems formulated by VNR (a history)

- VNR: Try to distinguish classes of q_ω,u_ω-compact and equationally Noetherian algebras. (The solution is due to M. Kotov).
- VNR (at the next day): Try to distinguish classes of q_ω,u_ω-compact and equationally Noetherian over standard algebraic systems (groups, semigroups...)

Commutative idempotent semigroups

Semigroup is a set with binary associative operations. A semigroup is called *commutative* (*idempotent*) if $\forall x \forall y\ xy = yx$ ($\forall x\ xx = x$). One can define the partial order over an idempotent semigroup

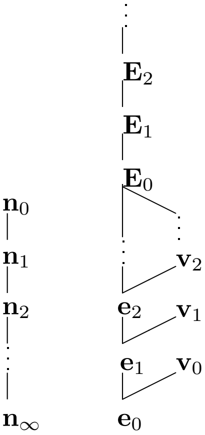
$$x \leq y \Leftrightarrow xy = x.$$

Полугруппой называется алгебраическая система с ассоциативной бинарной операцией. Полугруппа *коммутативна*, если для любой пары её элементов x, y выполнено соотношение $xy = yx$. Полугруппа называется *идемпотентной*, если для её любого элемента x справедливо равенство $xx = x$.

На элементах идемпотентной полугруппы определён частичный порядок

$$x \leq y \Leftrightarrow xy = x.$$

The Lattices of the elements of idempotent semigroups (решётки элементов идемпотентных полугрупп)



The definitions of semigroups (определение полугрупп)

$$\mathcal{A}_1 = \langle \{\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \ldots, \mathbf{n}_\infty\}; \cdot; \mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \ldots, \mathbf{n}_\infty \rangle,$$
$$\mathcal{A}_2 = \langle \{\mathbf{e}_i\} \cup \{\mathbf{E}_i\}; \cdot; \{\mathbf{e}_i\} \rangle,$$
$$\mathcal{A}_3 = \langle \{\mathbf{e}_i\} \cup \{\mathbf{v}_i\} \cup \{\mathbf{E}_i\}; \cdot; \{\mathbf{e}_i\} \rangle.$$

The representations of the semigroups $\mathcal{A}_i$ (представления полугрупп $\mathcal{A}_i$)

The semigroups $\mathcal{A}_i$ are embedded into direct product of the semigroup $\mathbb{F} = \langle \{0,1\}; \cdot; 0, 1\rangle$ (полугруппы $\mathcal{A}_i$ вкладываются в декартову степень полугруппы $\mathbb{F} = \langle \{0,1\}; \cdot; 0, 1\rangle$)

$$\mathbf{e}_i = \begin{pmatrix} \underbrace{11\dots1}_{i\text{ times}}00\dots \\ 00\dots000\dots \\ 00\dots000\dots \end{pmatrix} \quad (i \geq 0)$$

$$\mathbf{v}_i = \begin{pmatrix} \underbrace{11\dots1}_{i\text{ times}}00\dots \\ 00\dots100\dots \\ 00\dots000\dots \end{pmatrix} \quad (i \geq 0)$$

$$\mathbf{E}_i = \begin{pmatrix} 11\dots111\dots \\ 11\dots111\dots \\ \underbrace{11\dots1}00\dots \end{pmatrix} \quad (i \geq 0)$$

Terms (термы)

Each term $t(\bar{X})$ over semigroups $\mathcal{A}_i$ can be written in the equivalent form

$$t(X) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \mathbf{c},$$

where $\alpha_i \in \{0, 1\}$ and $\mathbf{c}$ is a constant of the algebraic system $\mathcal{A}_i$.
A term which does not contain constants is called *coefficient-free*. A coefficient-free term with $\alpha_i = 0$ for all i is called *empty*.

Каждый терм $t(\bar{X})$ над полугруппой $\mathcal{A}_i$ эквивалентен терму вида

$$t(X) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \mathbf{c},$$

где $\alpha_i \in \{0, 1\}$, $\mathbf{c}$ константа алгебраической системы $\mathcal{A}_i$.
Терм, в запись которого не входит константа, будем называть *бескоэффициентным*. Бескоэффициентный терм, для которого все числа α_i равны нулю будем называть *пустым*.

Equations (уравнения)

An equation over the semigroup $\mathcal{A}_i$ is an atomic formula $t(X)\mathbf{c} = s(X)\mathbf{c}'$, где $t(X), s(X)$ — coefficient-free terms. Remind that the terms $t(X), s(X)$ can be empty, and the constants can be omitted in one or both parts of equation.
The system of equations is an arbitrary set of equations. The solution of a system $\mathcal{S}$ over $\mathcal{A}_i$ is denoted as $\mathrm{V}_{\mathcal{A}_i}(\mathcal{S})$.
Two systems are called *equivalent over* $\mathcal{A}_i$ if they have the same solution.

Уравнением над полугруппой $\mathcal{A}_i$ будем называть атомарную формулу $t(X)\mathbf{c} = s(X)\mathbf{c}'$, где $t(X), s(X)$ — бескоэффициентные термы, $\mathbf{c}, \mathbf{c}'$ — константы алгебраической системы $\mathcal{A}_i$. Заметим, что термы $t(X), s(X)$ могут быть пустыми, а константы могут отсутствовать в одной или обоих частях уравнения. *Системой уравнений* будем называть произвольное множество уравнений. Решение системы уравнений $\mathcal{S}$ над полугруппой $\mathcal{A}_i$ будем обозначать через $\mathrm{V}_{\mathcal{A}_i}(\mathcal{S})$. Системы уравнений будем называть *эквивалентными над полугруппой* $\mathcal{A}_i$, если множества их решений над этой полугруппой совпадают.

Noetherian property (нётеровость по уравнениям)

A semigroup $\mathcal{A}$ is called *equationally Noetherian* if for each system $\mathcal{S}$ depending on the variables $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ there exists a finite subsystem equivalent to $\mathcal{S}$.

Полугруппа $\mathcal{A}$ называется *нётеровой по уравнениям*, если для любой системы уравнений $\mathcal{S}$ (в том числе и несовместной) от переменных $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ существует конечная подсистема, эквивалентная $\mathcal{S}$.

...and its generalizations (... и её обобщения)

The semigroup $\mathcal{A}$ is called *weakly Noetherian* if for each systems $\mathcal{S}$ depending on variables $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ there exists a finite systems $\mathcal{S}_0$ which is equivalent to $\mathcal{S}$ (here we do not assume $\mathcal{S}_0$ to be a subsystem of $\mathcal{S}$).

Полугруппа $\mathcal{A}$ называется *слабо нётеровой по уравнениям*, если для любой системы уравнений $\mathcal{S}$ от переменных $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ существует конечная система (не обязательно содержащаяся в $\mathcal{S}$), эквивалентная $\mathcal{S}$.

...and its generalizations (... и её обобщения)

The semigroup $\mathcal{A}$ is called q_ω-*compact* if for each systems $\mathcal{S}$ depending on variables $X=\{x_1,\ldots,x_n\}$ and for an equation $t(X)=s(X)$ such that $\mathrm{V}_{\mathcal{A}}(\mathcal{S})\subseteq \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(t(X)=s(X))$ there exists a finite systems $\mathcal{S}_0$ with $\mathrm{V}_{\mathcal{A}}(\mathcal{S}_0)\subseteq \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(t(X)=s(X))$.

Полугруппа $\mathcal{A}$ называется q_ω-*компактной*, если для любой системы уравнений $\mathcal{S}$ от переменных $X=\{x_1,\ldots,x_n\}$ и любого уравнения $t(X)=s(X)$ такого, что $\mathrm{V}_{\mathcal{A}}(\mathcal{S})\subseteq \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(t(X)=s(X))$ существует конечная подсистема $\mathcal{S}_0$ такая, что $\mathrm{V}_{\mathcal{A}}(\mathcal{S}_0)\subseteq \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(t(X)=s(X))$.

...and its generalizations (... и её обобщения)

The semigroup $\mathcal{A}$ is called u_ω-*compact* if for each systems $\mathcal{S}$ depending on variables $X=\{x_1,\ldots,x_n\}$ and for equations $t_1(X)=s_1(X),\ldots,t_m(X)=s_m(X)$ such that

$$\mathrm{V}_{\mathcal{A}}(\mathcal{S})\subseteq\cup_{i=1}^{m}\mathrm{V}_{\mathcal{A}}(t_i(X)=s_i(X)),$$

there exists a finite systems $\mathcal{S}_0$ with

$$\mathrm{V}_{\mathcal{A}}(\mathcal{S}_0)\subseteq\cup_{i=1}^{m}\mathrm{V}_{\mathcal{A}}(t_i(X)=s_i(X)).$$

Полугруппа $\mathcal{A}$ называется u_ω-*компактной*, если для любой системы уравнений $\mathcal{S}$ от переменных $X=\{x_1,\ldots,x_n\}$ и любого конечного набора уравнений $t_i(X)=s_i(X)$ $(1\leq i\leq m)$ таких, что

$$\mathrm{V}_{\mathcal{A}}(\mathcal{S})\subseteq\cup_{i=1}^{m}\mathrm{V}_{\mathcal{A}}(t_i(X)=s_i(X)),$$

существует конечная подсистема $\mathcal{S}_0$ такая, что

$$\mathrm{V}_{\mathcal{A}}(\mathcal{S}_0)\subseteq\cup_{i=1}^{m}\mathrm{V}_{\mathcal{A}}(t_i(X)=s_i(X)).$$

The comparison with abelian groups (сравнение с абелевыми группами)

Theorem. All abelian groups over the language $\mathcal{L} = \langle +, -; 0, \mathcal{C} \rangle$ are equationally Noetherian ($\mathcal{C}$ is an arbitrary set of constants).

Теорема. Все абелевы группы являются нётеровыми по уравнениям в языке $\mathcal{L} = \langle +, -; \mathcal{C} \rangle$, где $\mathcal{C}$ — произвольное множество констант.

Equationally Noetherian commutative idempotent semigroups (нётеровые по уравнениям коммутативные идемпотентные полугруппы)

Theorem. Let the set S be a commutative idempotent semigroup. Then the algebraic system $\mathcal{A} = \langle S; \cdot \rangle$ is equationally Noetherian.

Теорема. Пусть множество S образует коммутативную идемпотентную полугруппу относительно операции $\cdot$. Тогда алгебраическая система $\mathcal{A} = \langle S; \cdot \rangle$ является нётеровой по уравнениям.

Quasi-Equationally Noetherian commutative idempotent semigroups (нётеровые по уравнениям коммутативные идемпотентные полугруппы)

Recall that for equationally Noetherian semigroup all systems (including unsolvable) must have an equivalent finite systems. The definition: "A semigroup is equationally Noetherian if each solvable system has equivalent finite subsystem"is not equivalent to the first one. Since it easy to construct a commutative semigroup $\mathcal{A}_0$ such that
1) there exist an unsolvable system $\mathcal{S}$ over $\mathcal{A}_0$ such that all finite subsystems of $\mathcal{S}$ have a solution;
2) all solvable systems over $\mathcal{A}_0$ are equivalent to their finite subsystems.

Для нётеровой по уравнениям полугруппы все, в том числе и несовместные системы уравнений эквивалентны своей конечной подсистеме. Определение: "Полугруппа нётерова по уравнениям, если каждая совместная система над ней имеет эквивалентную конечною подсистемы"не эквивалентно исходному.

Ordered systems (упорядоченные системы)

An INFINITE system $\{t(X)\mathbf{a}_k = s(X)\mathbf{b}_k | k \in K\}$ is called *ordered* if coefficient-free terms $t(X), s(X)$ (we admit the terms $t(X), s(X)$ to be empty) occur in each equation and moreover the one of the following conditions holds:

1. $\mathbf{a}_k < \mathbf{b}_k$ for all equations;
2. $\mathbf{a}_k > \mathbf{b}_k$ for all equations;
3. $\mathbf{a}_k = \mathbf{b}_k$ for all equations;
4. each equation has a view $t(X)\mathbf{a}_k = s(X)$;
5. each equation has a view $t(X) = s(X)\mathbf{b}_k$.

It is easy to solve an ordered system $\{t(X)\mathbf{a}_k = s(X)\mathbf{b}_k | k \in K\}$. Introduce new variables $\mathbf{x} = t(X), \mathbf{y} = s(X)$ and solve the system with two variables.

Упорядоченные системы сводятся к системам от двух переменных.

Lemma Let $\mathcal{S}$ be an infinite system over the semigroup $\mathcal{A}_i$ and $\mathcal{S}$ depends on the variables $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Then $\mathcal{S}$ can be decomposed into a finite union of its subsystems

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \ldots \cup \mathcal{S}_m \cup \tilde{\mathcal{S}},$$

where $\mathcal{S}_i$ are ordered and $\tilde{\mathcal{S}}$ is finite.

Лемма Пусть $\mathcal{S}$ — бесконечная система уравнений над полугруппой $\mathcal{A}_i$ от переменных $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Тогда $\mathcal{S}$ представима в виде конечного объединения своих подсистем

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \ldots \cup \mathcal{S}_m \cup \tilde{\mathcal{S}},$$

где $\mathcal{S}_i$ — упорядоченные, а $\tilde{\mathcal{S}}$ — конечная система.

Semigroup $\mathcal{A}_1$

Theorem. $\mathcal{A}_1$ is weakly Noetherian, but not equationally Noetherian.

Теорема. Коммутативная полугруппа $\mathcal{A}_1$ слаба нётерова, но не является нётеровой по уравнениям.

Hint: $\mathcal{S} = \{x\mathbf{n}_i = x | i \in \mathbb{N}\} = \{x \leq \mathbf{n}_i | i \in \mathbb{N}\}$, $\mathrm{V}_{\mathcal{A}_1} = \{n_\infty\}$.

Semigroup $\mathcal{A}_2$

Theorem. $\mathcal{A}_2$ is u_ω-compact (and obviously q_ω-compact) but it is not equationally Noetherian.

Теорема. Коммутативная полугруппа $\mathcal{A}_2$ u_ω-компактна (и, следовательно, q_ω-компактна), но не является нётеровой по уравнениям.

Hint: $\mathcal{S} = \{x\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i | i \in \mathbb{N}\} = \{x \geq \mathbf{e}_i | i \in \mathbb{N}\}$, $\mathrm{V}_{\mathcal{A}_2} = \{x | x \geq \mathbf{E}_0\}$.

Semigroup $\mathcal{A}_3$

Теорема. $\mathcal{A}_3$ is q_ω-compact, but not u_ω-compact.

Теорема. Коммутативная полугруппа $\mathcal{A}_3$ q_ω-компактна, но не является u_ω-компактной.

Hint: $\mathcal{S} = \{x\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i, y\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i | i \in \mathbb{N}\}$ with
$\mathrm{V}_{\mathcal{A}_3} = \{(x, y) | x \geq \mathbf{E}_0, y \geq \mathbf{E}_0\}$.
$\mathrm{V}_{\mathcal{A}_3}(\mathcal{S}) \subseteq \mathrm{V}_{\mathcal{A}_3}(x \leq y) \cup \mathrm{V}_{\mathcal{A}_3}(x \geq y)$.

Evelina's will: the definitions of q_ω-compactness

Initial definition. The semigroup $\mathcal{A}$ is called q_ω-*compact* if for each systems $\mathcal{S}$ depending on variables $X=\{x_1,\ldots,x_n\}$ and for an equation $t(X)=s(X)$ such that $\mathrm{V}_{\mathcal{A}}(\mathcal{S})\subseteq \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(t(X)=s(X))$ there exists a finite systems $\mathcal{S}_0$ with $\mathrm{V}_{\mathcal{A}}(\mathcal{S}_0)\subseteq \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(t(X)=s(X))$.

Formula definition. A semigroup is called q_ω-compact if for each formula

$$\forall\, x_1\ldots\forall\, x_n \bigwedge_{(t=s)\in S} t(\bar{x})=s(\bar{x}) \;\to\; t_0(\bar{x})=s_0(\bar{x})$$

which is satisfied by semigroup $\mathcal{A}$ there exist a finite subsystem $S_c\subseteq S$ such that the formula

$$\forall\, x_1\ldots\forall\, x_n \bigwedge_{(t=s)\in S_c} t(\bar{x})=s(\bar{x}) \;\to\; t_0(\bar{x})=s_0(\bar{x})$$

holds at $\mathcal{A}$.

The q_ω-compactness of the semigroup $\mathcal{A}$ means that for an arbitrary number n, a set S of atomic formulas and an arbitrary atomic formula $(t_0 = s_0)$ of the language $\mathcal{L}$ the set

$$S \cup \{\neg(t_0 = s_0)\}$$

is a compact. In other words, the satisfiability of each finite subset of S at $\mathcal{A}$ implies the satisfiability of the whole set S.

Evelina's will: the definitions of u_ω-compactness

Initial definition. The semigroup $\mathcal{A}$ is called u_ω-*compact* if for each systems $\mathcal{S}$ depending on variables $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ and for equations $t_1(X) = s_1(X), \ldots, t_m(X) = s_m(X)$ such that

$$\mathrm{V}_{\mathcal{A}}(\mathcal{S}) \subseteq \cup_{i=1}^{m} \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(t_i(X) = s_i(X)),$$

there exists a finite systems $\mathcal{S}_0$ with

$$\mathrm{V}_{\mathcal{A}}(\mathcal{S}_0) \subseteq \cup_{i=1}^{m} \mathrm{V}_{\mathcal{A}}(t_i(X) = s_i(X)).$$

Formula definition. A semigroup is called q_ω-compact if for each infinite formula

$$\forall\, x_1 \ldots \forall\, x_n \bigwedge_{(t=s)\in S} t(\bar{x}) = s(\bar{x}) \;\rightarrow\; \bigvee_{i=1}^{m} t_i(\bar{x}) = s_i(\bar{x})$$

which is satisfied by semigroup $\mathcal{A}$ there exist a finite subsystem $S_c \subseteq S$ such that the formula

$$\forall\, x_1 \ldots \forall\, x_n \bigwedge_{(t=s)\in S_c} t(\bar{x}) = s(\bar{x}) \;\rightarrow\; \bigvee_{i=1}^{m} t_i(\bar{x}) = s_i(\bar{x})$$

The q_ω-compactness of the semigroup $\mathcal{A}$ means that for an arbitrary number n, set S of atomic formulas and an arbitrary atomic formulas $(t_1 = s_1), \ldots, (t_m = s_m)$ of the language $\mathcal{L}$ the set

$$S \cup \{\neg(t_1 = s_1), \ldots, \neg(t_m = s_m)\}$$

is a compact. In other words, the satisfiability of each finite subset of S at $\mathcal{A}$ implies the satisfiability of the whole set S.

KONEC (ЗЭ ЭНД).