СТРУКТУРНАЯ ТЕОРИЯ КЛАССОВ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ, БЛИЗКИХ К МОДУЛЯМ

Е.А.Палютин

Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН

Омск, 19-го августа 2009, $9^{00} - 9^{50}$.

Элиминация кванторов до базисных формул

- Теория T (аксиоматизируемый класс K) *допускает элиминацию кванторов до множества базисных формул* BF, если любая формула в T (в K) эквивалентна булевой комбинации базисных формул.

НЕТ элиминации кванторов $\Rightarrow$ НЕТ хорошей структурной теории

Конечно, элиминацию кванторов можно сделать искусственно, например расширив язык, введя для каждой формулы новый предикатный символ. Но здесь речь идет об элиминации не как о самоцели, а как об одном из ПРИЗНАКОВ НАЛИЧИЯ структурной теории, в которой сама эта элиминация СОСТАВЛЯЕТ некоторую ЕЕ ЧАСТЬ.

2 главных множества базисных формул

- Формулы вида

$$\exists x_1 \cdots \exists x_n (\Phi_0 \wedge \cdots \wedge \Phi_k),$$

  где Φ_i , $i \leq k$, — атомарные формулы, называются *позитивно примитивными*. Для краткости, мы будем их называть *примитивными*.

- Для формул Φ и Ψ формулу $(\exists \mathbf{x} \Phi \wedge \forall \mathbf{x} (\Phi \to \Psi))$ будем называть результатом *P-операции,* примененной к формулам Φ и Ψ.

В дальнейшем мы будем работать с некоторым множеством формул BF, которое будет называться БАЗИСНЫМ. Главными примерами будут множество ПРИМИТИВНЫХ ФОРМУЛ и множество P-ФОРМУЛ, содержащее атомарные формулы и замкнутое относительно конъюнкции и P-операции.

Элиминация кванторов в P-компаньонах

- Пусть T — полная теория, $A \models T$. Теория $T^P = \mathrm{Th}(A^F)$ называется *P-компаньоном* теории T, где A^F — приведенная степень по фильтру Фреше.

ТЕОРЕМА. (Палютин, 1980 г.)

P-компаньон T^P любой полной теории T допускает элиминацию кванторов до P-формул.

Структуры P-компаньона обладают еще одним важным свойством:

- P-множества Фреше степеней P-неприводимы.

Структурная теория модулей над ассоциативными кольцами

В 1956 году Ванда Шмелев доказала разрешимость теории класса всех групп. Этот результат она получила, доказав элиминацию кванторов до примитивных формул теории $Th(A)$ для любой абелевой группы A.

В конце 70-х годов прошлого века Баур, Гаравглиа и Монк независимо доказали элиминацию кванторов до примитивных формул для элементарной теории $Th(M)$ для любого модуля M над ассоциативным кольцом R.

Структурная теория модулей над ассоциативными кольцами

Основными свойствами, использованными при получении этого результата, были следующие:

- Любая примитивная формула $\Phi(\mathbf{x})$ без параметров определяет подгруппу абелевой группы декартовой степени M^n модуля M.
- Для любой примитивной формулы $\Phi(\mathbf{x}; \mathbf{y})$, любого модуля M и любого кортежа $\mathbf{a}$ множество $\Phi(M; \mathbf{a})$ является классом смежности по подгруппе $\Phi(M; \mathbf{0})$, где $\mathbf{0}$ — ноль аддитивной группы декартовой степени M^n модуля M.

  Тем самым

- Любые примитивные копии примитивно инъективно связаны.

Аддитивные теории

В статье “E.A.Palyutin, Additive theories, Proceedings of Logic Colloquium’98, Prague, 1998, Lectures Notes in Mathematical Logic, v.13.” было опубликовано доказательство теоремы об элиминации кванторов до примитивных формул для так называемых “аддитивных теорий”.

- Множества X и Y называются *базисно аддитивно связными*, если для любых элементов $a \in X$ и $b \in Y$ существует базисное, нетривиальное соответствие между X и Y, связывающее a и b.
- Теория T называется *базисно аддитивной*, если любые ее базисные копии базисно связны.

Базисно связные теории

В статье "Е.А.Палютин, Примитивно связные теории, Алгебра и логика, 39, N 2(2000)" была доказана элиминация кванторов для так называемых "примитивно связных теорий".

- Теория T называется *базисно связной*, если для любых примитивных копий X и Y существует нетривиальное базисное соответствие между X и Y.

Интерпретация графов в аксиоматизируемых классах структур

- Как уже давно принято в теории моделей, при изучении теории T доказательства проводятся в теории T^{eq}, модели которой содержат классы формульных эквивалентностей в моделях теории T в качестве новых элементов.
- Будем говорить, что класс графов (двудольных графов) K *размерностно интерпретируется в теории* T, если существуют Δ-базисные множества X, U (Δ-базисные множества X, Y, U) и тип $t(x, y, z)$ над некоторым множеством A, такие, что для любого графа $\Gamma \in K$ существует модель M_Γ теории T^{beq} и инъективное отображение f множества вершин графа Γ в неразличимое над A множество копий множества X (долей графа Γ соответственно в неразличимые множества копий множеств X и Y), такое, что условие $\langle a, b\rangle \in \Gamma$ равносильно условию

Интерпретация графов в аксиоматизируемых классах структур

(в $t(C, fa, fb)$ есть свободная копия V множества U и

$$dim_A(V, M_\Gamma) > (|L| + |\Gamma|)^+).$$

При этом будем говорить, что f является *t-интерпретацией графа* Γ *в* M_Γ.

2 главных примера неклассифицируемых классов

Пример 1.
Пусть язык теории T_1 состоит из двух 2-местных символов α, β.
Аксиомы теории T_1 утверждают следующее:
1) α и β определяют эквивалентности с бесконечным числом классов эквивалентности;
2) α и β перестановочны, т.е. композиции $(\alpha \circ \beta)$ и $(\beta \circ \alpha)$ совпадают;
3) объединение $(\alpha \vee \beta)$ в решетке эквивалентностей на C является единичной эквивалентностью, т.е. совпадает с C^2;
4) пересечение $(\alpha \wedge \beta)$ является эквивалентностью с бесконечными классами эквивалентности.
Нетрудно показать, что любые две счетные T_1-модели изоморфны. Следовательно, теория T_1 полна. Ясно также, что класс T_1-моделей замкнут относительно объединения возрастающих цепей. По теореме Линдстрема теория T_1 модельно полна.

2 главных примера неклассифицируемых классов

Легко показывается также, что эта теория ω-стабильна. Таким образом, теория T_1 по многим параметрам довольно проста. Кроме следующего — класс ее несчетных моделей не имеет сколько-нибудь приемлемой классификации с точностью до изоморфизма. В самом деле, сейчас мы покажем как в этой теории можно проинтерпретировать класс всех двудольных графов. Как известно, любую структуру конечного языка можно однородно проинтерпретировать (причем элементарным образом) в некотором двудольном графе.
Таким образом, классификация несчетных T_1-моделей равносильна классификации всех алгебраических систем.
ЧТО ПО ВСЕМ ПОНЯТИЯМ НЕВОЗМОЖНО
Таким образом, класс несчетных T_1-моделей принципиально не классифицируем.

2 главных примера неклассифицируемых классов

Опишем интерпретацию двудольных графов в T_1-моделях. Возьмем произвольный двудольный граф Γ с долями B_1 и B_2. Пусть $\varkappa$ — некоторый несчетный кардинал, больший мощности $|\omega \cup (B_1 \cup B_2)|^+$. По компактности существует T_1-модель A, у которой множества α-классов, β-классов и каждый $(\alpha \wedge \beta)$-класс имеют мощности, не меньшие κ.

2 главных примера неклассифицируемых классов

В качестве типа $t(x, y, z)$ берем формулу, выражающую отношение $x \in (y \cap z)$ для α-класса y и β-класса z. Рассмотрим некоторое инъективное отображение $f : (B_1 \cup B_2) \to A^{peq}$, при котором $f(B_1)$ и $f(B_2)$ являются соответственно множествами α-классов и β-классов. Возьмем подструктуру $A_0 \subseteq A$, получающуюся из структуры A уменьшением $(\alpha \wedge \beta)$-классов вида $(fa \cap fb)$, где $\langle a, b \rangle \notin \Gamma$, до некоторого счетного множества. Ясно, что структура A_0 будет T_1-моделью, а отображение f — интерпретацией Γ в A_0.

Пример 2.
Пусть язык теории T_2 состоит из 2-местного символа α и 4-местного символа μ.
Аксиомы теории T_2 утверждают следующее:
1) α определяет эквивалентность с бесконечным числом классов эквивалентности и каждый ее класс бесконечен;
2) μ определяет на α-классах структуру аффинной элементарной абелевой 2-группы, т.е.

$$C \models \mu(a, b, c, d) \Leftrightarrow \alpha d = (\alpha a + \alpha b - \alpha c),$$

где $+$ и $-$ — сумма и разность в элементарной абелевой 2-группе.
Так же, как для теории T_1, нетрудно показать, что теория T_2 ω-категорична, полна, модельно полна и ω-стабильна. В классе ее несчетных моделей интерпретируется класс всех графов.
Покажем это.
Возьмем произвольный граф Γ с множеством вершин B. Пусть $\varkappa$ — некоторый несчетный кардинал, больший мощности $|B|^+$.

По компактности существует T_2-модель A, у которой множества α-классов и каждый α-класс имеют мощности, не меньшие $\varkappa$. Пусть X_0 — некоторый α-класс.
В качестве типа $t(x, y, z)$ берем формулу, выражающую условие $x \in (y + z - X_0)$. Пусть $f : B \to A^{eq}$ — инъективное отображение, при котором $f(B)$ является независимым относительно $\{X_0\}$ множеством α-классов.
Возьмем подструктуру $A_0 \subseteq A$, получающуюся из структуры A уменьшением α-классов вида $(fa + fb - X_0)$, где $\langle a, b\rangle \notin \Gamma$, до некоторого счетного множества. Ясно, что структура A_0 будет T_2-моделью, а отображение f — t-интерпретацией Γ в A_0.

Классифицируемые классы по Шелаху

Шелах определил классифицируемые классы структур как те, теории которых суперстабильны и не обладают свойством DOP. Так как существуют модули с несуперстабильной теорией, то структурная теория классифицируемых классов не включает структурную теорию модулей.

Коммутативные теории

Определение коммутативных теорий состоит, грубо говоря, в отсутствии элементарной интерпретации приведенных выше двух примеров. А именно

- Теория T называется *базисно коммутативной* , если выполняются условия:
  1) T базисно нормальна;
  2) любая Δ-аддитивная пара $\langle X, Y\rangle$ наследственно базисно связана;
  3) любой базисный треугольник альтернативно базисно связан.

ТЕОРЕМА Коммутативные теории допускают элиминацию кванторов до базисных формул и одноместных формул.

Базисные оболочки

ТЕОРЕМА

Для любого множества A существует его позитивная оболочка.

ТЕОРЕМА

Пусть B, B' — позитивные оболочки множества A, Тогда существует базисный A-изоморфизм f множества B на B'.

ТЕОРЕМА

Пусть B — λ-позитивно конструируемая над $(D \cup A)$ модель теории T, $|A| \geqslant \lambda$, $t(x)$ — тип над $(D \cup A)$, A — множество, независимое в типе $t(x)$. Пусть выполняется следующее условие:

(*) *если некоторая* P*-формула* $\Phi(x)$ *над* $(D \cup A)$ *делит тип* $t(x)$, *то существует формула* $\Psi(x)$ *над* A, *которая делит тип* $t(x)$ *и для которой выполняется* $t(x) \vdash (\Phi(x) \to \Psi(x))$.

Тогда множество A *является максимальным независимым в типе* $t(x)$ *подмножеством множества* $t(B)$.

ТЕОРЕМА

Пусть теория T Фреше-степени A^F некоторой структуры A стабильна и не является P-коммутативной. Тогда в T интерпретируется класс всех графов или класс всех двудольных графов.