Линейные уравнения над свободной антикоммутативной алгеброй

Онскуль Илья Владимирович

Омский Государственный Университет

Омск
2009г.

История вопроса

- В работах В. Н. Ремесленникова и Э. Ю. Данияровой был выделен и описан класс ограниченных алгебраических множеств над свободной алгеброй Ли. Результаты, полученные для этого класса множеств, полностью переносятся на свободную антикоммутативную алгебру.

- Позже, в совместной статье В. Н Ремесленников и Р. Штёра было показано, что множество решений уравнения $xu + yv = 0$ $(u, v \in \mathcal{L})$ над алгеброй Ли $\mathcal{L}$ не является ограниченным алгебраическим множеством.

- ***Задача***:
  Исследовать решения линейных уравнений над свободной антикоммутативной алгеброй.

Свободная антикоммутативная алгебра

- $\mathcal{A}$ – свободная конечно порождённую антикоммутативная алгебра над полем k со свободной базой $\{a_1, \ldots, a_r\}$, $r > 1$

- $\mathcal{H}$ – базис холловского типа алгебры $\mathcal{A}$
- Основное свойство $\mathcal{H}$:
для любых различных $h_1, h_2 \in \mathcal{H}$ либо $h_1 h_2 \in \mathcal{H}$, либо $h_2 h_1 \in \mathcal{H}$
- Определим функцию $\varepsilon : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathcal{H} \cup \{0\}$ следующим образом:

$$\varepsilon(h_1, h_2) = \begin{cases} h_1 h_2, \text{ если } h_1 > h_2; \\ h_2 h_1, \text{ если } h_1 < h_2; \\ 0, \text{ если } h_1 = h_2. \end{cases}$$

Ограниченные алгебраические множества

Определение

Алгебраическое множество $Y \subseteq A^n$ над алгеброй A называется ограниченным, если оно содержится в конечномерном линейном подпространстве n-мерного аффинного пространства A^n.

Определение

Алгебраическое множество $Y \subseteq A^n$ над алгеброй A назовём ограниченным с параметрами $t_1, \ldots, t_m$, если существует ограниченное алгебраическое множество Y' над алгеброй $A[t_1, \ldots, t_m]$, $Y' \subseteq A[t_1, \ldots, t_m]^n$, такое, что

$$Y = \{(y_1(c_1, \ldots, c_m), \ldots, y_n(c_1, \ldots, c_m)) \in A^n \mid (y_1(t_1, \ldots, t_m), \ldots, y_n(t_1, \ldots, t_m)) \in Y', c_1, \ldots, c_m \in A\}.$$

Наиболее просты в исследовании линейные уравнения вида

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n \; + \; x_1 u_1 + x_2 u_2 + \ldots + x_n u_n = w.$$

Было показано, что множество решений уравнения такого вида либо ограниченно, либо является алгебраическим множеством, ограниченным с параметрами.

Лемма

Пусть $u_1, \ldots, u_n$ — линейно независимые элементы свободной конечно порождённой антикоммутативной алгебры $\mathcal{A}$ над полем k. Тогда решение линейного уравнения

$$x_1 u_1 + \ldots + x_n u_n = 0$$

над алгеброй $\mathcal{A}$ является ограниченным алгебраическим множеством и имеет вид:

$$\{\, (x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{A}^n \mid (x_1, \ldots, x_n) = (u_1, \ldots, u_n) \cdot D, D \in \mathrm{M}_n(k),\; D = D^T \,\}.$$

Следствие

Пусть $u_{m+1}, \dots, u_n$ — линейно независимые элементы алгебры $\mathcal{A}$, $1 \leqslant m < n$, P — прямоугольная $(n-m) \times m$-матрица и $(u_1, \dots, u_m) = (u_{m+1}, \dots, u_n) \cdot P$. Тогда решение линейного уравнения (1) *над алгеброй $\mathcal{A}$ является ограниченным с параметрами $t_1, \dots, t_m$ алгебраическим множеством и имеет вид:*

$$\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{A}^n \mid \\ (x_1, \dots, x_n) = (t_1, \dots, t_m, u_{m+1}, \dots, u_n) \cdot \begin{pmatrix} E & -P^T \\ 0 & D \end{pmatrix}, \\ D \in \mathrm{M}_{n-m}(k),\ D = D^T,\ t_1, \dots, t_m \in \mathcal{A} \},$$

где E — единичная матрица порядка m. Количество параметров m равно $n - \mathrm{rank}(u_1, \dots, u_n)$.

Пример

$$xu + yv = 0, \quad u, v \in \mathcal{A}. \tag{1}$$

Если элементы u, v линейно независимы, то множество его решений ограниченно:

$$\mathrm{V}(\{xu + yv = 0\}) \;=\; \{\, (x, y) \in \mathcal{A}^2 \mid (x, y) = (u, v) \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix},\ \alpha, \beta, \gamma \in k \,\}.$$

Если же элементы u, v линейно зависимы, например, $v = \lambda u$, $\lambda \in k$, то решение уравнения (1) *является ограниченным с параметром y:*

$$\mathrm{V}(\{xu + yv = 0\}) \;=\; \{\, (x, y) \in \mathcal{A}^2 \mid x = \alpha u - \lambda y,\ \alpha \in k,\ y \in \mathcal{A} \,\}.$$

Пример

Рассмотрим уравнение

$$x + x(ab) + ya = 0 \tag{2}$$

от переменных x, y над алгеброй $\mathcal{A}$. Здесь a, b — элементы свободной базы алгебры $\mathcal{A}$. Одно из решений уравнения (2) *доставляет пара $x = ab$, $y = b$. Как видно, $y \notin \mathrm{lin}_k\{\mathrm{supp}(ab, a)\}$.*

Пусть $X \subseteq \mathcal{A}$ — произвольное подмножество алгебры $\mathcal{A}$. Через $\mathrm{supp}^+(X)$ обозначим наименьшее подмножество $\mathcal{H}_1$ базиса $\mathcal{H}$, обладающее следующими двумя свойствами:

1. $\mathrm{supp}(X) \subseteq \mathcal{H}_1$;
2. если $h_1 \in \mathrm{supp}(X)$ и $\varepsilon(h_1, h_2) \in \mathcal{H}_1$, то $h_2 \in \mathcal{H}_1$.

Лемма

Пусть $u_1, \ldots, u_n$ *— линейно независимые элементы свободной антикоммутативной алгебры* $\mathcal{A}$ *и* $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{A}^n$ *— решение линейного уравнения* $x_1 + x_1 u_1 + x_2 u_2 + \ldots + x_n u_n = w$. *Тогда* $\mathrm{supp}(x_1, \ldots, x_n) \subseteq \mathrm{supp}^+(u_1, \ldots, u_n, w)$.

Следствие

Пусть $u_1, \ldots, u_n$ *— линейно независимые элементы свободной конечно порождённой антикоммутативной алгебры* $\mathcal{A}$ *над полем* k. *Тогда решение линейного уравнения* $x_1 + x_1 u_1 + x_2 u_2 + \ldots + x_n u_n = w$ *над алгеброй* $\mathcal{A}$ *является ограниченным алгебраическим множеством. Это алгебраическое множество ограничено кубическим* n*-параллелепипедом* $\mathbb{V} = V \times \ldots \times V$, *где* $V = \mathrm{lin}_k\{\mathrm{supp}^+(u_1, \ldots, u_n, w)\}$.

Лемма

Пусть $u_1, \ldots, u_n$ — линейно зависимые элементы свободной конечно порождённой антикоммутативной алгебры $\mathcal{A}$ над полем k. Тогда решение линейного уравнения

$$x_1 + x_1 u_1 + \ldots + x_n u_n = 0$$

над алгеброй $\mathcal{A}$ является ограниченным с параметрами алгебраическим множеством. Число параметров равно $(n-1)$, если $u_1 \in \mathrm{lin}_k\{u_2, \ldots, u_n\}$, или $n - \mathrm{rank}(u_1, \ldots, u_n)$, если $u_1 \notin \mathrm{lin}_k\{u_2, \ldots, u_n\}$.

Пример

Рассмотрим уравнение $S \,:\, x + xu + yu = 0$ если $u \neq 0$, то его множество решений

$$\mathrm{V}(S) \;=\; \{x = tu,\; y = \alpha u - t - ut \mid \alpha \in k,\; t \in A\}$$

Теорема

Множество решений системы линейных уравнений с параметрами вида

$$\begin{array}{l} x_1u_{11} + x_2u_{12} + \ldots + x_nu_{1n} = y_1 \\ x_1u_{21} + x_2u_{22} + \ldots + x_nu_{2n} = y_2 \\ \ldots \\ x_1u_{m1} + x_2u_{m2} + \ldots + x_nu_{mn} = y_m, \end{array}$$

где $y_1, y_2, \ldots, y_m$ принимают значения из ограниченных алгебраических множеств $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ соответственно, является либо ограниченным алгебраическим множеством, либо алгебраическим множеством, ограниченным с параметрами, причем в последнем случае имеет вид

$$\begin{array}{l} x_1 = \alpha_{11}t_1 + \alpha_{12}t_2 + \ldots + \alpha_{1k}t_k + w_1, \\ x_2 = \alpha_{21}t_1 + \alpha_{22}t_2 + \ldots + \alpha_{2k}t_k + w_2, \\ \ldots \\ x_n = \alpha_{n1}t_1 + \alpha_{n2}t_2 + \ldots + \alpha_{nk}t_k + w_n, \end{array}$$

где $t_1, t_2, \ldots, t_k$ - параметры, принимающие произвольные значения, причем $k < n$ а $w_1, w_2, \ldots, w_n$ принимают значения из ограниченных алгебраических множеств $W_1, W_2, \ldots, W_n$ соответственно.

Заключение

Полученные результаты позволяют говорить о значительно более простой структуре алгебраической геометрии над свободной антикоммутативной алгеброй по сравнению с алгеброй Ли.