

Описание полных теорий минимаксных алгебраических систем

Ю. С. Дворжецкий

Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского

22 августа 2009 г.

Содержание

- 1 Основные определения теории моделей
- 2 Полные теории минимаксных систем
- 3 Случай нетранзитивного максимума

Полные теории и порядок

Определение

Пусть L — язык. Теорию T языка L будем называть полной, если для любой формулы φ языка L либо $T \vdash \varphi$, либо $T \vdash \neg \varphi$.

Полные теории и порядок

Определение

Пусть L — язык. Теорию T языка L будем называть полной, если для любой формулы φ языка L либо $T \vdash \varphi$, либо $T \vdash \neg \varphi$.

Определение

Двуместный предикатный символ $\leq^{(2)}$ со следующими аксиомами:

- 1 $\forall x (x \leq x)$ (рефлексивность),
- 2 $\forall x \forall y \forall z (x \leq y) \wedge (y \leq z) \rightarrow (x \leq z)$ (транзитивность),
- 3 $\forall x \forall y (x \leq y) \wedge (y \leq x) \rightarrow (x = y)$ (антисимметричность)

будем называть отношением порядка. Теорию, содержащую эти аксиомы, будем называть теорией линейно упорядоченного множества, а соответствующую модель — моделью линейно упорядоченного множества.

Полные теории и порядок

Определение

Пусть L — язык. Теорию T языка L будем называть полной, если для любой формулы φ языка L либо $T \vdash \varphi$, либо $T \vdash \neg \varphi$.

Определение

Двуместный предикатный символ $\leq^{(2)}$ со следующими аксиомами:

- 1 $\forall x (x \leq x)$ (рефлексивность),
- 2 $\forall x \forall y \forall z (x \leq y) \wedge (y \leq z) \rightarrow (x \leq z)$ (транзитивность),
- 3 $\forall x \forall y (x \leq y) \wedge (y \leq x) \rightarrow (x = y)$ (антисимметричность)

будем называть отношением порядка. Теорию, содержащую эти аксиомы, будем называть теорией линейно упорядоченного множества, а соответствующую модель — моделью линейно упорядоченного множества.

Множество полных теорий языка L будем обозначать $\mathcal{T}(L)$.

Аксиомы максимума

Запишем множество аксиом $A1$ для символа \max :

- 1 $\forall x \forall y \max(x, y) = \max(y, x),$
- 2 $\forall x \forall y \max(x, y) = x \vee \max(x, y) = y,$
- 3 $\forall x \forall y \forall z \max(x, \max(y, z)) = \max(\max(x, y), z).$

Идемпотентность

Утверждение

Предложение $\forall x \max(x, x) = x$ (аксиома идемпотентности) следует из набора аксиом $A1$.

Классификация теорий

Теорема

$\mathcal{T}(L) = \{T_0, T_1, T_2, \dots, T_n, \dots\} \cup \mathcal{T}_\infty$, где T_i для $i \in \mathbb{Z}_+$ — теория одной модели линейно упорядоченного множества из i элементов, где символ \max интерпретируется естественным образом.
Теории из множества \mathcal{T}_∞ — теории бесконечных линейно упорядоченных множеств, где символ \max интерпретируется естественным образом.

Аксиомы максимума

Рассмотрим другое множество аксиом $A2$:

- 1 $\forall x \forall y \max(x, y) = \max(y, x)$,
- 2 $\forall x \forall y \max(x, y) = x \vee \max(x, y) = y$,

Идемпотентность

Утверждение

Предложение $\forall x \max(x, x) = x$ (аксиома идемпотентности) следует из набора аксиом A2.

Классификация полных теорий

Теорема

Множество полных теорий языка L можно представить в виде $\mathcal{T}(L) = \mathcal{T}_0 \cup \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 \cup \dots \cup \mathcal{T}_n \cup \dots \cup \mathcal{T}_\infty$, где \mathcal{T}_i для $i \in \mathbb{Z}_+$ — теории полных ориентированных графов с n вершинами с петлями и без кратных рёбер, в которых действие символа \max на элементах интерпретируется как направление ребра графа.

Благодарности

Хочу поблагодарить своего научного руководителя Ремесленникова Владимира Никаноровича за постановку задачи и внимательное отношение к моей работе и всех присутствующих за внимание!