Описание полных теорий минимаксных алгебраических систем

Ю. С. Дворжецкий

Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского

22 августа 2009 г.

Содержание

Полные теории и порядок

Определение

Пусть L *— язык. Теорию* T *языка* L *будем называть полной, если для любой формулы* φ *языка* L *либо* $T \vdash \varphi$, *либо* $T \vdash \rceil\varphi$.

Полные теории и порядок

Определение

Пусть L — язык. Теорию T языка L будем называть полной, если для любой формулы φ языка L либо $T \vdash \varphi$, либо $T \vdash \rceil \varphi$.

Определение

Двуместный предикатный символ $\leq^{(2)}$ со следующими аксиомами:

1. $\forall x \; (x \leq x)$ *(рефлексивность)*,
2. $\forall x \forall y \forall z \; (x \leq y) \wedge (y \leq z) \rightarrow (x \leq z)$ *(транзитивность)*,
3. $\forall x \forall y \; (x \leq y) \wedge (y \leq x) \rightarrow (x = y)$ *(антисимметричность)*

будем называть отношением порядка. Теорию, содержащую эти аксиомы, будем называть теорией линейно упорядоченного множества, а соответствующую модель — моделью линейно упорядоченного множества.

Полные теории и порядок

Определение

Пусть L — язык. Теорию T языка L будем называть полной, если для любой формулы φ языка L либо $T \vdash \varphi$, либо $T \vdash \rceil \varphi$.

Определение

Двуместный предикатный символ $\leq^{(2)}$ со следующими аксиомами:

1. $\forall x \ (x \leq x)$ *(рефлексивность),*
2. $\forall x \forall y \forall z \ (x \leq y) \wedge (y \leq z) \rightarrow (x \leq z)$ *(транзитивность),*
3. $\forall x \forall y \ (x \leq y) \wedge (y \leq x) \rightarrow (x = y)$ *(антисимметричность)*

будем называть отношением порядка. Теорию, содержащую эти аксиомы, будем называть теорией линейно упорядоченного множества, а соответствующую модель — моделью линейно упорядоченного множества.

Множество полных теорий языка L будем обозначать $\mathcal{T}(L)$

Аксиомы максимума

Запишем множество аксиом $A1$ для символа $\max$:

1. $\forall x \, \forall y \;\; \max(x, y) = max(y, x)$,
2. $\forall x \, \forall y \;\; \max(x, y) = x \;\vee\; max(x, y) = y$,
3. $\forall x \, \forall y \, \forall z \;\; \max(x, \max(y, z)) = \max(\max(x, y), z)$.

Идемпотентность

Утверждение

Предложение $\forall x \ \max(x,x) = x$ *(аксиома идемпотентности) следует из набора аксиом* $A1$.

Классификация теорий

Теорема

$\mathcal{T}(L) = \{T_0, T_1, T_2, \ldots, T_n, \ldots\} \cup \mathcal{T}_\infty$, где T_i для $i \in \mathbb{Z}_+$ — теория одной модели линейно упорядоченного множества из i элемнетов, где символ $\max$ интерпретируется естественным образом.
Теории из множества $\mathcal{T}_\infty$ — теории бесконечных линейно упорядоченных множеств, где символ $\max$ интерпретируется естественным образом.

Аксиомы максимума

Рассмотрим другое множество аксиом $A2$:

1. $\forall x \, \forall y \ \max(x,y) = max(y,x)$,
2. $\forall x \, \forall y \ \max(x,y) = x \ \vee \ max(x,y) = y$,

Идемпотентность

Утверждение

Предложение $\forall x \ \max(x,x) = x$ *(аксиома идемпотентности) следует из набора аксиом* $A2$.

Классификация полных теорий

Теорема

Множество полных теорий языка L можно представить в виде $\mathcal{T}(L) = \mathcal{T}_0 \cup \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 \cup \ldots \cup \mathcal{T}_n \cup \ldots \cup \mathcal{T}_\infty$, где $\mathcal{T}_i$ для $i \in \mathbb{Z}_+$ — теории полных ориентированных графов с n вершинами с петлями и без кратных рёбер, в которых действие символа $\max$ на элементах интерпретруется как направление ребра графа.

Благодарности

Хочу поблагодарить своего научного руководителя Ремесленникова Владимира Никаноровича за постановку задачи и внимательное отношение к моей работе и всех присутствующих за внимание!