Алгебраические множества и координатные группы для свободной нильпотентной группы ступени 2

Амаглобели М.Г.

Тбилисский государственный университет им. Иванэ Джавахишвили

27 Августа 2009

Аналогичная проблема изучалась:

1. G — свободная группа: Lyndon (1960), Lorenc (1963,1965), Appel (1968). Окончательньяа формулировка теоремы над свободной группой получена в работе Чизвелла и Ремесленникова (2000).
2. G — свободная метабелевая группа: Chapuis (1997), Remeslennikov and Stoer (2004), Ремесленников и Романовский (2004). Окончательные результаты были получены в работе Ремесленникова и Романовского (2005).

О нильпотентных группах ступени 2

Пусть $\mathcal{N}_2$ — многообразие двуступенно нильпотентных групп. Если $G \in \mathcal{N}_2$, те её коммутант G' содержится в центре $Z(G)$.
Пусть теперь $G = \langle a_1, \ldots, a_r \rangle$ — свободная нильпотентная группа ранга $r > 1$, где a_i — свободные порождающие группы G.
Обозначим через $c_{ij} = [a_j, a_i]$ $(j > i)$ базисные коммутаторы веса 2.
Известно, что элемент $g \in G$ может быть записан в виде

$$g = a_1^{\alpha_1} \ldots a_r^{\alpha_r} \Pi c_{ji}^{\beta_{ji}}, \tag{1}$$

$\alpha_i, \beta_{ij} \in \mathbb{Z}$ и такое представление единственно. Кроме того, известно, что для свободной группы из $\mathcal{N}_2$ $Z(G) = G'$.
Хорошо известно также, что элемент в форме (1) является примитивным для G (его можно включить в систему свободных порождающих для G) тогда и только тогда, когда строка $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ унимодулярна.

Ключевой пример

Пусть K — коммутативное кольцо с единицей. Группа

$$UT_3(K) = \{\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ на месте } * \text{ стоят элементы } K\}.$$

Тогда

$$Z(UT_3(K)) = UT_3(K)' = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\}$$

Элементы алгебраической геометрии

Так как конечно порождённые линейные группы представимы матрицами над полем, то они являются нётеровыми по уравнениям. Поэтому мы можем применить объединяющую теорему А.

Теорема А.(без коэффициентов) Пусть $\mathcal{A}$ — нётерова по уравнениям алгебра языка без предикатов $\mathcal{L}$. Тогда для любой конечно порождённой алгебры $\mathcal{C}$ языка $\mathcal{L}$ следующие условия эквивалентны:

1) $\mathcal{C}$ является координатной алгеброй непустого неприводимого алгебраического множества над $\mathcal{A}$, определяемого системой уравнений в языке $\mathcal{L}$;
2) $\mathrm{Th}_{\forall}(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{Th}_{\forall}(\mathcal{C})$, то есть, $\mathcal{C} \in \mathrm{ucl}(\mathcal{A})$;
3) $\mathrm{Th}_{\exists}(\mathcal{A}) \supseteq \mathrm{Th}_{\exists}(\mathcal{C})$
4) $\mathcal{C}$ вкладывается в ультрастепень алгебры $\mathcal{A}$;
5) $\mathcal{C}$ дискриминируется алгеброй $\mathcal{A}$;
6) $\mathcal{C}$ является предельной алгеброй над $\mathcal{A}$;
7) $\mathcal{C}$ является алгеброй, определяемой полным атомарным типом теории $\mathrm{Th}_{\forall}(\mathcal{A})$ языка $\mathcal{L}$.

Пусть F — свободная нильпотентная группа конечного ранга.
Из теоремы А следует, что проблема классификации координатных групп сводится к проблеме описания конечно порождённых групп из $\mathrm{qvar}(F)$, а также проблема классификации неприводимых координатных групп эквивалентна проблеме описания конечно порождённых групп из $\mathrm{ucl}(F)$.

Ю.Л. Ершов доказал, что универсальная теория свободной группы ранга 2 $F_2 = \langle a, b \rangle$ с выделенными элементами a, b алгоритмически неразрешима.
В.А. Романьков: без выделенных элементов эта проблема эквивалентна разрешимости универсальной теории поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$.
Следовательно, отмеченные выше задачи являются достаточно сложными. Поэтому в данном докладе будут рассматриваться не весь класс координатных алгебр, а некоторые конкретные его подклассы.

Следующий важный результат не верен для произвольной группы, но верен для конечно порождённых нильпотентных групп.
Лемма. Пусть G — конечно порождённая нильпотентная группа, и H — координатная группа алгебраического множества над G. Тогда существует такое натуральное число k, что H является G-подгруппой $G^k = \underbrace{G \times \ldots \times G}_{k \text{ раз}}$, причём G вкладывается в G^k диагональным способом, т.е.

$$\Delta\colon G \to G^k,\ \Delta(g) = (g, g, \ldots, g) -$$

каноническое вложение G в G^k.

Теорема 1. Пусть $H = \langle \Delta(G), x \rangle$, $x = (g_1, \ldots, g_k)$. Тогда выполнена одна из следующих альтернатив:

1. $x \in \Delta(G)$ и тогда $H \cong G$;
2. с точностью до сдвига на элемент $\Delta(g) = (g, \ldots, g)$ элемент x таков, что $g_i \in Z(G)$ и $x \notin \Delta(G)$; в этом случае $H = G \times \langle x \rangle$;
3. с точностью до сдвига на элемент $\Delta(g) = (g, \ldots, g)$ элемент x таков, что $fx \notin Z(G^k)$ для всех $f \in \Delta(G)$ и существует элемент $g \notin Z(G)$ такой, что $g_i \in C_G(g)$; в этом случае $H = \langle G, x | [x, g_0] = 1 \rangle_{\mathcal{N}_2}$, где $g = g_0^l c$, $c \in Z(G)$ и из g_0 по модулю $Z(G)$ не извлекается корень (g_0 — корневой элемент);
4. если не выполнено ни одно из условий 1-3, то $H = G *_{\mathcal{N}_2} \langle x \rangle$ — свободная нильпотентная группа ранга $r + 1$ в $\mathcal{N}_2$.

В теореме 1 дано полное описание координатных групп для систем уравнений с одной переменной над свободной нильпотентной группой ступени 2.

Теорема 2. Любая координатная группа H для системы уравнений от одной переменной над свободной нильпотентной группой G из $\mathcal{N}_2$ является неприводимой координатной группой.

Теорема 3. Любое алгебраическое множество Y над свободной группой G ранга $r > 1$ из $\mathcal{N}_2$ с точностью для изоморфизма является одним из следующих

1. Y — точка;
2. Y — $Z(G)$ — центр группы G;
3. Y — централизатор элемента $g \in G$, $g \notin Z(G)$;
4. $Y = G$.

Матричное представление координатных алгебр

Пусть Γ — неприводимая координатная алгебра для F и пусть R — насыщенное коммутативное кольцо которое дискриминируется кольцом $\mathbb{Z}$ (примером такого кольца является ультрастепень $\bar{Z} = \Pi \mathbb{Z}_i / D$, где D — неглавный ультрафильтр).
Предложение 1. Конечно порождённые подгруппы $UT_3(\bar{Z})$ и только они являются неприводимыми координатными группами.

Обозначим через $UT_3^{\omega}(\bar{Z}) = \Pi_{i=1}^{\infty} UT_3(\bar{Z}_i)$, $\bar{Z}_i \cong \bar{Z}$
Предложение 2. Конечно порождённые подгруппы из $UT_3^{\omega}(\bar{Z})$ и только они являются координатными группами.

Нильпотентные CT_1-группы

Определение. Группа G называется CT_1-группой, если для любого нецентрального элемента x централизатор $C_G(x)$ является абелевой подгруппой.
Это свойство записывается в виде универсальной формулы

$$\mathcal{CT}_1 : \forall x, y, z, t\{[x, t] \neq 1 \wedge [x, y] = 1 \wedge [x, z] = 1 \to [y, z] = 1\}$$

Следовательно, верно следующее
Предложение 1. Класс всех CT_1-групп является универсальным классом, который определяется аксиомой $\mathcal{CT}_1$.
Лемма. Класс CT_1-групп замкнут относительно следующих операций:

1. взятия подгрупп и ультрапроизведений;
2. если G является CT_1-группой, то координатные группы неприводимых алгебраических множеств над G также являются CT_1-группами.

Примеры.

1. Свободная c-нильпотентная группа является CT_1-группой при $c = 2, 3$.
2. Группы $UT_3(\mathbb{Z})$ и $UT_4(\mathbb{Z})$ являются CT_1-группами.

Предложение 2. Пусть G — CT_1-группа и A — абелева группа. Тогда прямое произведение $G \times A$ является CT_1-группой.

Предложение 3. Пусть G_1, G_2 — 2-нильпотентные CT_1-группы и $Z(G_i) = [G_i, G_i]$, $i = 1, 2$. Тогда свободное произведение $G_1 *_{\mathcal{N}_2} G_2$ групп G_1, G_2 в многообразии $\mathcal{N}_2$ также является CT_1-группой.

Расширение централизатора

Пусть G — группа, $g \in G$ — неединичный элемент, $C = C_G(g)$ — централизатор элемента g в G и $\mathcal{M}$ — многообразие, порождённое группой G. Тогда группу H, заданную представлением

$$H = \langle G, t | t^{-1}ct = c, \ \forall c \in C \rangle_{\mathcal{M}}$$

в многообразии $\mathcal{M}$ будем называть, следуя работе А.Г. Мясникова и В.Н. Ремесленникова, расширением централизатора ранга 1.
Объединение цепочки подгрупп

$$G = H_1 < H_2 < \ldots < H_k = H,$$

где группа H_{i+1} $(i = 1, \ldots, k-1)$ есть расширение централизатора ранга 1, будем называть итерированным расширением централизатора над G.

Для расширений централизаторов справедлив следующий результат.
Предложение. Пусть G — конечно порождённая двуступенно нильпотентная группа со свойством CT_1, и H — итерированное расширение над G. Тогда группа H дискриминируется группой G. В частности, H является также CT_1-группой и все её подгруппы, содержащие G, являются неприводимыми координатными группами над G.

Это предложение является аналогом результата Линдона для свободных групп. Знаменитая теорема О. Харлампович и А. Мясникова утверждает, что верно и обратное.
Мы не знаем ответа на следующий вопрос: верен ли аналог этой теоремы для свободной нильпотентной неабелевой группы?